

GEOMETRÍA

KMO

$$f(x) = x - T$$

¡Full CEPRES!
+ EXAMENES DE ADMISION

Juan Carlos Ramos Leyva

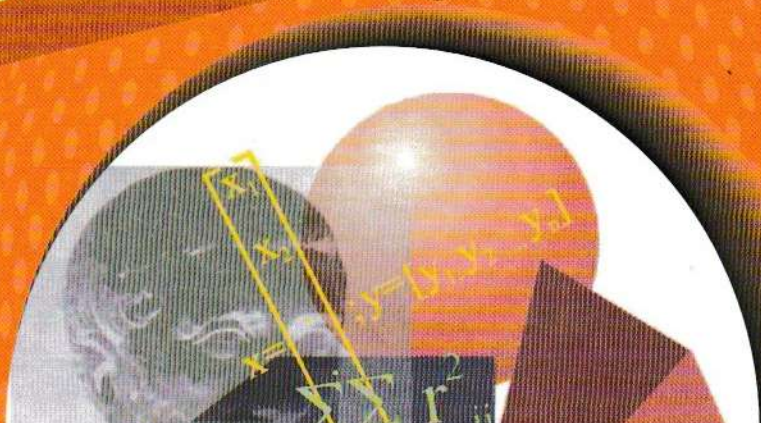
FONDO EDITORIAL
AROD

6

Potencia de un Binomio- Factorial de un número - Combinatorio

Teoría y Práctica

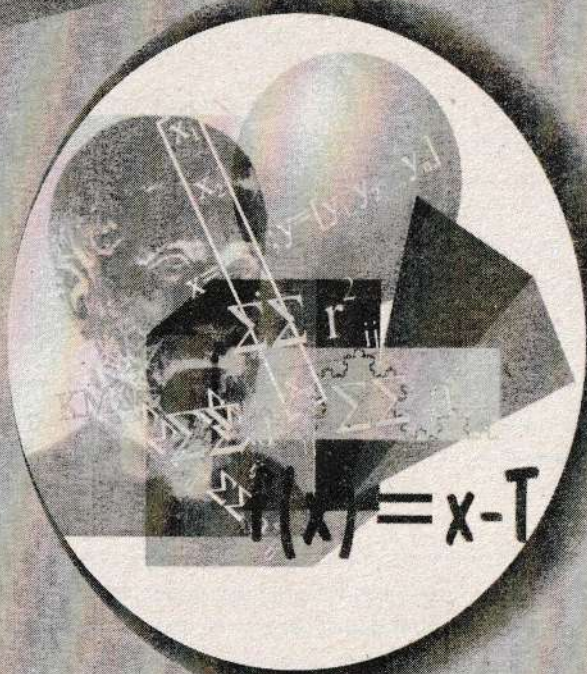
AL



6

Potencia de un binomio-Factorial
de un número-Combinatoria
Teoría y Práctica

ALGEBRA



¡Full CEPRES!
+ EXAMENES DE ADMISION

Juan Carlos Ramos Leyva

FONDO EDITORIAL
ARODON

PRESENTACIÓN

El **Fondo Editorial RODO** es un grupo educativo con formado por profesionales de experiencia que por muchos años vienen participando en el análisis y producción de textos acordes con las necesidades del sistema educativo. Conocedores de la realidad de nuestro educando que día a día nos muestra la interacción con ellos en las aulas de clase y poniendo de manifiesto nuestro compromiso como educadores hemos asumido el reto de contribuir a elevar el nivel académico de manera integral.

Continuando con la elaboración de nuestra colección con miras al ciclo académico 2013, en esta oportunidad presentamos el texto teórico - práctico denominado **TEMAS SELECTOS DE ÁLGEBRA**, desarrollado con la gran experiencia de nuestro grupo humano. Caracterizándolo así por el rigor y la exigencia académica, ya que abarca los temas y preguntas solicitadas según la currícula de los centros preuniversitarios de las universidades más importantes del país relacionados con el curso.

Esta obra es la continuación de nuestra serie de publicaciones, caracterizada por la calidad e innovación constatada en los miles de ingresantes que han tenido como apoyo nuestras colecciones, esperando los comentarios y sugerencias las cuales sabremos aceptar

La presente serie de boletines consta de una sección teórica, donde se muestra toda la teoría referente al capítulo o capítulos mostrados en el boletín, luego se determina una sección de 100 problemas resueltos por los autores clasificados por nivel de exigencia de menor a mayor dificultad, explicados de manera clara y sencilla que servirá tanto para alumnos que recién empiezan su camino a la universidad, como alumnos de nivel avanzado, dándole nuevas alternativas de solución, luego se cuenta con 100 problemas propuestos con sus respectivas claves para que el alumno mida su nivel de comprensión respecto al capítulo con problemas de igual exigencia que la sección anterior, por último se muestra una sección de exámenes de admisión del curso en mención, con soluciones explicadas de la mejor manera.

POTENCIA DE UN BINOMIO - FACTORIAL DE UN NÚMERO - COMBINATORIA



ÁLGEBRA - TEMA SELECTO 06, 1ra Edición

No está permitida la reproducción total o parcial de este libro, tampoco su tratamiento informático, ni la transmisión de ninguna forma o por cualquier medio, ya sea electrónico, mecánico, por fotocopia, por registro u otros métodos, sin el permiso previo y por escrito de los titulares del copyright.

DERECHOS RESERVADOS © Febrero 2014 por

FONDO EDITORIAL RODO

de Walter Z. Benitez Nuñez

Av. Venezuela 979 Of. 205 - Breña

LIMA 05, PERÚ ☎ 424 - 6350 📠 992 - 796104

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú

Nº: 2014 - 03268

EQUIPO PEDAGÓGICO

Juan Carlos Ramos Leyva

DIAGRAMACIÓN, DIGITACIÓN Y GRÁFICOS

José Miguel Gallo Ballena

IMPRESO EN PERÚ PRINTED IN PERÚ

Impreso en los Talleres Gráficos de **CORPORACIÓN PIANCASH S. A. C.**

Jr. Chancay 446 Of. 112 - Lima 01

FACTORIAL

DEFINICIÓN

Dado un número natural "n", el factorial del número "n" es una relación funcional que se denota así: $n! = |n = n|$ y se define de la manera siguiente:

$$|n = \begin{cases} 1 & ; n = 0 \vee n = 1 \\ 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n & ; n \geq 2 \end{cases}$$

- $|2 = 1 \cdot 2 = 2$
- $|3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$
- $|4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$
- $|5 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

TEOREMA $\forall n \in \mathbb{Z}^+$

$$|n = n \cdot |n - 1$$

- $|7 = 7 |6 = 7 \cdot 6 |5$
- $|10 = 10 |9 = 10 \cdot 9 \cdot |8$
- $|18 = 18 |17 = 18 \cdot 17 |16$
- $|21 = 21 |20 = 21 \cdot 20 \cdot |19$



OBSERVACIÓN

El teorema anterior es muy útil para efectuar operaciones de adición, sustracción o división entre factoriales, veamos algunas aplicaciones.

- $|12 + |13 = |12 + 13 \cdot |12 = 14 \cdot |12$
- $|17 - |16 = 17 |16 - |16 = 16 |16$
- $\frac{|10}{|9} = \frac{10 \cdot |9}{|9} = 10$

Debemos tener en cuenta que siempre se expresa el factorial mayor en función del menor.

PROPIEDAD $\forall x \wedge y \in \mathbb{Z}^+ - \{1\}$

$$|x = |y \rightarrow x = y$$

- $|x - 4 = |7 \rightarrow x - 4 = 7$
 $\therefore x = 11$

NÚMERO COMBINATORIO**DEFINICIÓN**

Dados los naturales $n \wedge k$ de modo que $0 \leq k \leq n$, el combinatorio de "n" en "k" denotado por C_k^n se define de la manera siguiente:

$$C_k^n = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

- $C_2^4 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 2} = 2 \cdot 3 = 6$
- $C_3^7 = \frac{7!}{4! \cdot 3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{4 \cdot 6} = 7 \cdot 5 = 35$

TEOREMAS**1) Básicos:**

$$C_0^n = 1 ; C_1^n = n ; C_n^n = 1$$

- $C_0^{10} = 1 ; C_1^8 = 8 \wedge C_7^7 = 1$

2) De Complemento:

$$C_k^n = C_{n-k}^n$$

- $C_{17}^{19} = C_{19-17}^{19} = C_2^{19}$

3) De Degradación:

$$C_k^n = \frac{n}{k} C_{k-1}^{n-1}$$

- $C_8^{17} = \frac{17}{8} C_7^{16}$

$$C_k^n = \left(\frac{n-k+1}{k} \right) C_{k-1}^n$$

- $C_5^{12} = \left(\frac{12-5+1}{5} \right) C_4^{12} = \left(\frac{8}{5} \right) C_4^{12}$

$$C_k^n = \left(\frac{n}{n-k} \right) C_k^{n-1}$$

$$\bullet \quad C_4^7 = \left(\frac{7}{7-4} \right) C_4^6 = \left(\frac{7}{3} \right) C_4^6$$

4) De Reducción:

$$C_k^n + C_{k+1}^n = C_{k+1}^{n+1}$$

$$\bullet \quad C_5^9 + C_6^9 = C_6^{10}$$

PROPIEDAD

$$C_k^n = C_r^n \rightarrow k=r \vee k+r=n$$

$$\bullet \quad C_x^{10} = C_4^{10} \rightarrow x=4 \vee x+4=10$$

$$\therefore x=4 \vee x=6$$

COEFICIENTE BINOMIAL

DEFINICIÓN

Dados $m \in \mathbb{R} \wedge k \in \mathbb{N}$, el coeficiente binomial de m en k denotado por $\binom{m}{k}$ se define de la manera siguiente:

$$\binom{m}{k} = \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \dots \cdot [m-(k-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (k-1) \cdot k}$$

Observe que el numerador presenta "k" factores.

$$\bullet \quad \binom{-2}{3} = \frac{(-2) \cdot (-2-1) \cdot (-2-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{(-2) \cdot (-3) \cdot (-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = -4$$

$$\bullet \quad \binom{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} \cdot (\sqrt{2}-1)}{1 \cdot 2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$$



OBSERVACIÓN

El número combinatorio es un caso particular del coeficiente binomial, razón por el cual todos los teoremas vistos para el número combinatorio son válidos para el coeficiente binomial.

$$\bullet \quad \binom{m}{0} = 1; \forall m \in \mathbb{R}$$

$$\bullet \quad \binom{m}{1} = m; \forall m \in \mathbb{R}$$

POTENCIA DE UN BINOMIO CON EXPONENTE NATURAL**DEFINICIONES**

- 1) $(x + y)^0 = 1$
- 2) $(x + y)^1 = x + y$

TEOREMAS

- 1) $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
- 2) $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
- 3) $(x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$
- $\vdots$

TEOREMA DEL BINOMIO

$$(x + y)^n = C_0^n x^n + C_1^n x^{n-1}y + C_2^n x^{n-2}y^2 + \dots + C_n^n y^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\bullet \quad (x + y)^2 = C_0^2 x^2 + C_1^2 xy + C_2^2 y^2 = 1 \cdot x^2 + 2 \cdot xy + 1 \cdot y^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

PROPIEDADES

- 1) El desarrollo de $(x + y)^n$ presenta $(n + 1)$ términos.
- 2) La suma de los coeficientes de todos los términos del desarrollo de $(x + y)^n$ se obtiene Reemplazando cada variable de la base por la unidad.

$$\bullet \quad \text{Para el desarrollo de } (3x^4 - y^3)^5, \text{ N}^\circ \text{ de términos} = 5 + 1 = 6$$

$$\Sigma \text{Coef} = (3 \cdot 1^4 - 1^3)^5 = (3 - 1)^5 = (2)^5 = 32$$

- 3) Fórmula del término de lugar $(k + 1)$ en el desarrollo de $(x + y)^n$

$$t_{k+1} = C_k^n x^{n-k} y^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

Donde:

- t_{k+1} = término de lugar $k + 1$
 n = exponente del binomio
 x = primer término del binomio
 y = segundo término del binomio

Ejemplo: Determinar el cuarto término del desarrollo de $(2x^2 - y^3)^6$

Resolución: Se observa que $n = 6$, se pide t_4 , es decir $k = 3$

$$t_4 = C_3^6 [2x^2]^{6-3} [-y^3]^3$$

$$t_4 = C_3^6 [2x^2]^3 [-y^3]^3$$

$$t_4 = 20 \cdot 8x^6 \cdot -y^9$$

$$\therefore t_4 = -160x^6y^9$$

OBSERVACIÓN

Si en el desarrollo de $(x + y)^n$ se quiere determinar el término de lugar $(k + 1)$ contado a partir del extremo final (derecha a izquierda) se tendrá en cuenta la relación:

$$t_{k+1} = C_k^n y^{n-k} x^k$$

PROPIEDAD

Dada la potencia $(x + y)^n$ con "n" par, el desarrollo presenta término central cuyo lugar lo denotaremos así: LTC y se calcula según:

$$LTC = \frac{n + 2}{2}$$

Ejemplo:

Determinar el término central del desarrollo de $\left(\frac{x}{2} + \frac{2}{x}\right)^8$:

Resolución:

Se observa que $LTC = \frac{8 + 2}{2} = 5$ luego por fórmula se debe hallar t_5 , donde $n = 8 \wedge k = 4$.

$$t_5 = C_4^8 \left(\frac{x}{2}\right)^{8-4} \cdot \left(\frac{2}{x}\right)^4$$

$$t_5 = C_4^8 \left(\frac{x}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{x}\right)^4$$

$$t_5 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{x^4}{16} \cdot \frac{16}{x^4}$$

$$\therefore t_5 = 70$$

TEOREMAS SOBRE SERIES

$$\forall n \in \mathbb{N} \wedge x \in \mathbb{R}$$

$$1) C_0^n + C_1^n + C_2^n + C_3^n + \dots + C_n^n = 2^n$$

$$2) C_0^n + C_2^n + C_4^n + C_6^n + \dots + \blacktriangle = 2^{n-1}$$

$$3) C_1^n + C_3^n + C_5^n + C_7^n + \dots + \blacksquare = 2^{n-1}$$

$$4) [C_0^n]^2 + [C_1^n]^2 + [C_2^n]^2 + [C_3^n]^2 + \dots + [C_n^n]^2 = C_n^{2n}$$

$$5) 1 + xC_1^n + x^2C_2^n + x^3C_3^n + \dots + x^nC_n^n = (1 + x)^n$$

PROPIEDADES ADICIONALES

- 1) La suma de todos los exponentes de las variables de los términos del desarrollo de:

$$P(x; y) = (ax^\alpha + by^\beta)^n$$

se obtiene según la relación:

$$\sum_{\text{expon}} = \frac{(\alpha + \beta)(n)(n + 1)}{2}$$

- 2) Para obtener el término numéricamente más grande (término máximo) en el desarrollo de $(x + y)^n$ se deberá plantear la siguiente relación:

$$t_{k+1} > t_k$$

POTENCIA DE UN BINOMIO CON EXPONENTE ENTERO NEGATIVO O FRACCIONARIO

Siendo "n" entero negativo o fraccionario, el desarrollo de $(x + y)^n$ admite infinitos términos y comúnmente recibe el nombre de serie binominal o binomio de Newton.

$$(x + y)^n = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \dots$$

$$\bullet \quad (1 + x)^{-\frac{1}{3}} = \left(\frac{-1}{3} \right) [1]^{-\frac{1}{3}} + \left(\frac{-1}{3} \right) [1]^{-\frac{1}{3}-1} \cdot x + \left(\frac{-1}{3} \right) [1]^{-\frac{1}{3}-2} \cdot x^2 + \dots$$

$$(1 + x)^{-\frac{1}{3}} = (1) [1] + \left(\frac{-1}{3} \right) [1] x + \frac{\left(\frac{-1}{3} \right) \left(\frac{-1}{3} - 1 \right)}{1 \cdot 2} [1] x^2 + \dots$$

$$(1 + x)^{-\frac{1}{3}} = 1 - \frac{x}{3} + \frac{2x^2}{9} - \dots$$

La fórmula que permite determinar al término que ocupa la posición $k + 1$ en el desarrollo de la potencia es:

$$t_{k+1} = \binom{n}{k} x^{n-k} y^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

APROXIMACIÓN LINEAL

Si $m \in \mathbb{Q} \wedge |x| < 1$:

$$(1 + x)^m = 1 + mx$$

La relación anterior es muy útil para aproximar raíces, sólo debemos tener en cuenta que el valor de x es muy pequeño, prácticamente cero.

Ejemplo: Calcular aproximadamente la raíz cúbica de 221.

Resolución: Se pide: $E = \sqrt[3]{221}$. Ahora buscamos un número cercano (por izquierda o derecha) a 221 que admita raíz cúbica

$$221 = 216 + 5 \leftrightarrow \sqrt[3]{221} = \sqrt[3]{216 + 5}$$

$$E = \sqrt[3]{216 \left(1 + \frac{5}{216}\right)} = \sqrt[3]{216} \cdot \sqrt[3]{1 + \frac{5}{216}}$$

$$E = 6 \cdot \left(1 + \frac{5}{216}\right)^{\frac{1}{3}} \quad \text{"Por la aproximación"}$$

$$E = 6 \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{216}\right) = 6 + \frac{10}{216} = \frac{653}{108} \quad \therefore E = \sqrt[3]{221} \approx 6,046$$

POTENCIA DE UN POLINOMIO CON EXPONENTE NATURAL

Consideremos un polinomio de "k" términos ($k \in \mathbb{N} / k \geq 3$), el cual se eleva al exponente natural "n" ($n \geq 2$)

$$(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_k)^n = \underbrace{(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_k) \cdot (x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_k) \cdot \dots \cdot (x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_k)}_{\text{"n" factores}}$$

$$(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_k)^n = x_1^n + \dots + x_k^n$$

Cualquier término del desarrollo adopta la forma:

$$\binom{n}{\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3; \dots; \alpha_k} x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot x_3^{\alpha_3} \cdot \dots \cdot x_k^{\alpha_k}$$

Donde: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_k \in \mathbb{N}$ y verifican la relación: $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_k = n$

OBSERVACIÓN

La expresión $\binom{n}{\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3; \dots; \alpha_k}$ recibe el nombre de **COEFICIENTE MULTINOMIAL** y se desarrolla así:

$$\binom{n}{\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3; \dots; \alpha_k} = \frac{n!}{\alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdot \alpha_3! \cdot \dots \cdot \alpha_k!}$$

Por ejemplo: $\binom{5}{1; 2; 2} = \frac{5!}{1! \cdot 2! \cdot 2!} = \frac{120}{1 \cdot 2 \cdot 2} = 30$

FÓRMULA DE LEIBNITZ

Es la relación matemática que permite abreviar el desarrollo de la potencia de un polinomio, veamos:

$$(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_k)^n = \sum \binom{n}{\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3; \dots; \alpha_k} x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot x_3^{\alpha_3} \cdot \dots \cdot x_k^{\alpha_k}$$

Donde el símbolo "Σ" (sumatoria) se extiende a todas las soluciones en enteros no negativas de la ecuación:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_k = n$$

Ejemplo: Dando uso a la fórmula de Leibnitz desarrollar la siguiente potencia:

$$(x + y + z)^2$$

Resolución: De acuerdo con la fórmula de Leibnitz se plantea:

$$(x + y + z)^2 = \sum \binom{2}{\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3} x^{\alpha_1} \cdot y^{\alpha_2} \cdot z^{\alpha_3}$$

Donde se cumple que: $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2$

Ahora resolviendo en $\mathbb{N}$: $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2$

↓	↓	↓	
0	0	2	 (I)
0	2	0	 (II)
2	0	0	 (III)
0	1	1	 (IV)
1	0	1	 (V)
1	1	0	 (VI)

Con (I) el término será: $\binom{2}{0;0;2} x^0 \cdot y^0 \cdot z^2 = z^2$

Con (II) el término será: $\binom{2}{0;2;0} x^0 \cdot y^2 \cdot z^0 = y^2$

Con (III) el término será: $\binom{2}{2;0;0} x^2 \cdot y^0 \cdot z^0 = x^2$

Con (IV) el término será: $\binom{2}{0;1;1} x^0 \cdot y^1 \cdot z^1 = 2yz$

Con (V) el término será: $\binom{2}{1;0;1} x^1 \cdot y^0 \cdot z^1 = 2xz$

Con (VI) el término será: $\binom{2}{1;1;0} x^1 \cdot y^1 \cdot z^0 = 2xy$

Finalmente considerando al símbolo Σ se tendrá:

$$\therefore (x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$$

PROPIEDAD

Siendo $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$ términos con diferentes variables. El número de términos de la expansión de la potencia $(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_k)^n$ se obtiene por:

$$\boxed{C_{k-1}^{n+k-1}}$$

1. Calcular: $\left[\frac{6! + 5!}{5! + 4!} \right]^{0!}$

- A) $\frac{11}{9}$ B) $\frac{35}{6}$ C) $\frac{34}{5}$
D) $\frac{37}{6}$ E) $\frac{17}{9}$

2. Calcular: $\frac{C_4^{12} + C_5^{12} + C_7^{13}}{C_6^{14} + C_7^{14}}$

- A) $\frac{15}{7}$ B) 1 C) $\frac{2}{5}$
D) $\frac{5}{2}$ E) $\frac{7}{15}$

3. Calcular " $x^2 + 1$ ", si " x " verifica:

$$\frac{|x| + |x+1| + |x+2|}{|x+1| - |x|}$$

- A) 17 B) 10 C) 26
D) 37 E) 5

4. Calcular " $x^2 - 1$ ", si " x " verifica:

$$C_1^x + C_2^x = C_2^5 + C_3^5 + 0,5x$$

- A) 889 B) 399 C) 1599
D) 2499 E) 624

5. Reducir:

$$|1 + 2|2 + 3|3 + 4|4 + \dots + 2012|2012$$

- A) $|2013 + 1$ B) $|2012 - 1$
C) $|2012 + 1$
D) $|2013 - 1$ E) $|2011 - 1$

6. Reducir:

$$C_0^1 + C_1^2 + C_2^3 + C_3^4 + \dots + C_{38}^{39}$$

- A) 560 B) 475 C) 780
D) 820 E) 960

7. Calcular la suma de cifras de:

$$C_2^x + C_3^{x+1} + C_4^{x+2} = 70 - x$$

- A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

8. Reducir:

$$\left(\frac{-1}{2} \right) + \left(\frac{2}{4} \right) + \left(\frac{\sqrt{3} + 1}{3} \right)$$

- A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B) $\frac{1 + \sqrt{3}}{3}$ C) $\frac{3 + \sqrt{3}}{3}$
D) $\frac{3 - \sqrt{3}}{3}$ E) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

9. Determinar el valor de " x " en:

$$\frac{|x+2| + |x+1| + |x|}{|x+2| - |x+1| - |x|} = 1,$$

- A) 20 B) 21 C) 22
D) 23 E) 24

10. Cuál es el valor de " n " que verifica la igualdad:

$$9C_9^n = nC_5^{n-1}$$

- A) 13 B) 14 C) 15
D) 16 E) 17

11. Calcular el grado del sexto término del desarrollo de: $P(x; y) = (x^2 - 5y^3)^{12}$

A) 26 B) 27 C) 28
D) 29 E) 30

12. Calcular la suma de los 20 primeros coeficientes del desarrollo de:

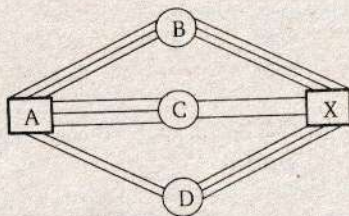
$$P(x) = (1 - x^3)^{-2}; |x| < 1$$

A) 90 B) 160 C) 180
D) 200 E) 210

13. En un examen, un estudiante debe resolver 10 preguntas de las 13 dadas. Si tiene que contestar necesariamente por lo menos 3 de entre las 5 primeras, entonces el número de maneras en que puede elegir las 10 preguntas es:

A) 80 B) 220 C) 276
D) 285 E) 316

14. ¿Por cuántos caminos diferentes se puede ir de la ciudad "A" a la ciudad "X", si se tiene el siguiente mapa de camino?



A) 19 B) 20 C) 21
D) 22 E) 23

15. De un grupo de 4 peruanos y otro de 5 colombianos se debe elegir 4 personas para formar una comisión. ¿De cuántas maneras diferentes se puede formar la comisión tal que ésta tenga por lo menos uno de cada nacionalidad?

A) 21 B) 35 C) 120
D) 420 E) 465

16. ¿De cuántas maneras diferentes podrán caer un dado y una moneda si son lanzadas simultáneamente?

A) 6 B) 8 C) 12
D) 36 E) 16

17. Dos viajeros llegan a hospedarse a un hotel que dispone de cinco habitaciones para darles cabida. Si ellos no comparten habitación, ¿De cuántas maneras diferentes se les podrán hospedar?

A) 5 B) 25 C) 4
D) 20 E) 16

18. Cierta equipo de fútbol tiene 6 delanteros. En el equipo titular sólo deben alternar tres. ¿De cuántas maneras diferentes podrá el entrenador seleccionar una delantera?

A) 10 B) 15 C) 20
D) 30 E) 720

19. Un club tiene 10 miembros. ¿De cuántas maneras diferentes pueden formar una directiva de 4 personas, miembros de dicho club?

A) 200 B) 500 C) 210
D) 150 E) 320

20. ¿De cuántas maneras 3 argentinos, 4 peruanos, 4 chilenos y 2 bolivianos pueden sentarse, ordenadamente, en una de modo que los de la misma nacionalidad se sienten juntos?

A) 3456 B) 6912 C) 20736
D) 41472 E) 165888

21. Encontrar el valor "x" que verifica:

$$\left[\frac{{}^nC_{x-4} + 2{}^nC_{x-3} + {}^nC_{x-2}}{2} \right]! = 120$$

A) 4 B) 3 C) 5
D) 6 E) 7

22. Al reducir:

$$\binom{-20}{1} + \binom{-19}{2} + \binom{-18}{3} + \dots + \binom{-1}{20}$$

Se obtiene:

A) 1 B) -1 C) 2
D) 0 E) 3

23. Encontrar el valor de "n" en:

$$\frac{2(n-3)}{[n-3][1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n-7)]} = 4096$$

A) 15 B) 14 C) 13
D) 12 E) 11

24. Encontrar el coeficiente del término que admite a x^{20} como parte literal en

la expansión de: $\left(x^3 + \frac{1}{x}\right)^{12}$

A) 120 B) 12 C) 520
D) 245 E) 495

25. Encontrar el valor de "n" para que el cuarto término del desarrollo de

$(x^2 - y)^n$ presente a "x" con exponente 10.

A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 10

26. Hallar el valor de "n" sabiendo que la diferencia entre los grados absolutos de los términos sexto y decimosexto del desarrollo de: $(x^4 + y^n)^{2m}$ es 10

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

27. En la expansión de: $(\sqrt{x}^3 + x^{-1/3})^n$ la suma de todos los coeficientes es igual a 128. Hallar el coeficiente del término que presenta como parte literal a x^5 .

A) 60 B) 84 C) 120
D) 35 E) 45

28. Encontrar al término que no contiene a "x" en la expansión de: $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{4\sqrt{x}}\right)^9$

A) 484 B) 84 C) 125
D) 45 E) 210

29. Si en la expansión de: $(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y})^{10}$ el quinto término es 1 y el sexto término es 2, calcular el valor de: $E = 3\sqrt[3]{\frac{x}{y}}$

A) 1,2 B) 0,1 C) -0,5
D) 0,6 E) -0,6

30. Encontrar un número natural "n" para que los términos de lugares 9 y 7 en el desarrollo de:

$$\left(\frac{\sqrt{13}x}{2} + y^2\right)^n$$

admitan el mismo coeficiente.

- A) 20 B) 21 C) 22
D) 18 E) 15

31. Para que el valor de "n" se verifica

$$C_1^n + 2C_2^n + 3C_3^n + \dots + nC_n^n = 192$$

- A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

32. Calcular "n" sabiendo que la suma de los coeficientes de los desarrollos de:

$$(3x^2 - 1)^n \text{ y } (5x^3 - 1)^{2n-6}$$

son respectivamente iguales

- A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

33. Si $n \in \mathbb{N}$; $n \geq 3$. Al simplificar:

$$\binom{n}{2} + \binom{n-1}{2}, \text{ se obtiene siempre:}$$

- A) Un número primo
B) Un cuadrado perfecto
C) Un número impar
D) Un número par
E) Un múltiplo de 4

34. Para que valor de "n" se cumple:

$$\frac{nC_1^n}{C_1^n} + \frac{2(n-1)C_2^n}{C_1^n} + \frac{3(n-2)C_3^n}{C_2^n} + \dots + \frac{nC_n^n}{C_{n-1}^n} = 204$$

- A) 8 B) 7 C) 6
D) 5 E) 4

35. Determine el valor de "n" para que el término de lugar 25 en la expansión de:

$$\left(\frac{x^2}{y} + \frac{y}{\sqrt{x}}\right)^{5n+2}$$

presente a "x" con exponente 44.

- A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 10

36. Que lugar ocupa el término independiente de "x" en la expansión de:

$$\left(\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^{154}$$

- A) 112 B) 113 C) 114
D) 115 E) 116

37. En la expansión de:

$$\left(3x^3 + \frac{1}{x}\right)^n$$

existe un término en la cual su grado es numéricamente igual a la posición que ocupa, indicar dicha posición, si la suma de los coeficientes de todos los términos del desarrollo es igual a: 2^{34}

- A) 7 B) 8 C) 9
D) 10 E) 11

38. En el desarrollo de:

$$\left(\sqrt[5]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{120}$$

determina, en ese orden, el número de términos racionales e irracionales.

- A) 9 y 112 B) 10 y 111
C) 8 y 113
D) 7 y 114 E) 12 y 109

39. Calcular la suma de los coeficientes del desarrollo de:

$$(x^5 + y^p)^n$$

si los términos

$qx^{q+2}y^4$ y $4rx^{10}y^{r+5}$ son equidistantes

tes

- A) 128 B) 256 C) 64
D) 512 E) 1024

40. Al desarrollar la expresión:

$$\left(\frac{x^p}{y^{n-10}} + \frac{y^{n+20}}{x} \right)^n$$

se observa que éste admite un solo término central cuya parte literal es $x^{60}y^{600}$. Calcular el valor de $(n + p)$

- A) 40 B) 44 C) 46
D) 48 E) 52

41. Determinar el lugar que ocupa el término de mayor valor numérico que se obtiene al desarrollar:

$$(3 + 2x)^{15} \text{ para } x = \frac{7}{2}$$

- A) 11 B) 12 C) 13
D) 14 E) 15

42. Calcular la suma de la serie combinatoria:

$$C_0^n + 2^2 C_1^n + 2^4 C_2^n + 2^6 C_3^n + \dots + (n+1)$$

términos:

- A) 5^n B) 4^n C) 3^n
D) 2^n E) 6^n

43. Efectuar e indicar la suma de:

$$\frac{5C_0^n}{1} + \frac{5^2 C_1^n}{2} + \frac{5^3 C_2^n}{3} + \dots + \frac{5^{n+1} C_n^n}{n+1}$$

- A) $\frac{5^n - 1}{n+1}$ B) $\frac{6^{n+1} - 1}{n+1}$
C) $\frac{5^{n+1} - 1}{n+1}$
D) $\frac{6^n - 1}{n+1}$ E) $\frac{7^n - 1}{n+1}$

44. El valor de "x" es tan pequeño de tal manera que su cuadrado y además potencias superiores pueden despreciarse de acuerdo a esto señalar el equivalente reducido de:

$$A = \frac{\sqrt{9+x}}{1+x}$$

- A) $1 - \frac{7x}{6}$ B) $3 - \frac{7x}{6}$
C) $3 - \frac{17x}{6}$
D) $1 - \frac{x}{6}$ E) $1 - \frac{15x}{4}$

45. Al desarrollar $(x + y + z + w)^8$ se obtienen "n" términos, en el cual uno de ellos toma la forma: $mx^3y^2zw^2$, de acuerdo a lo anterior, calcular el valor de "m + n".

A) 1875 B) 1840 C) 1865
D) 1860 E) 1845

46. Para que valor de "n" en el desarrollo de:

$$(\sqrt{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[4]{z})^n$$

aparece un término cuya parte literal es: xyz

A) 9 B) 10 C) 11
D) 12 E) 13

47. En el desarrollo de: $(x^2 + y - x)^8$. Hallar el coeficiente del término de la forma: $x^{10}y^k$ donde: "K" es un número par no nulo.

A) 120 B) 340 C) 420
D) 460 E) 520

48. Sea: $(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_m)^n$ un polinomio cuyo desarrollo tiene 15 términos, además la suma de sus coeficientes es 5^n . Calcular "n".

A) 6 B) 5 C) 3
D) 2 E) 4

49. Hallar el coeficiente de x^{12} en la expansión de:

$$(x - 3x^2 + 2x^3 + x^4)^{10}$$

A) 20 B) 360 C) 415
D) 405 E) 425

50. Calcular "n" en la ecuación

$$n! + 5 - 22 \left(\frac{n! + 1}{n! + 5} \right) = \frac{1}{n! + 5}$$

A) 6 B) 3 C) 5
D) 4 E) 2

51. Resolver:

$$[9x^2 + (63 + [8]6)x + [7] = 0$$

A) $\left\{ -\frac{[16]}{9}; -\frac{7}{[8]} \right\}$ B) $\left\{ \frac{[16]}{7}; -\frac{6}{[8]} \right\}$
C) $\left\{ -\frac{[15]}{7}; -\frac{[7]}{9} \right\}$
D) $\{ [6]; -[7] \}$ E) $\left\{ -\frac{7}{[8]}; -\frac{[5]}{9} \right\}$

52. Calcular "m + n", sabiendo que:

$$C_8^m + 4C_9^m + 6C_{10}^m + 4C_{11}^m + C_{12}^m = C_{27}^n$$

A) 39 B) 35 C) 74
D) 12 E) 27

53. Determinar el término independiente de x en el desarrollo de:

$$\left(x^2 - \frac{1}{x} \right)^9$$

A) 80 B) 6 C) 12
D) 82 E) 84

54. Determinar "x" si en el desarrollo de:

$$\left(\sqrt[3]{2} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^x$$

la relación entre el séptimo término contado desde el principio y el séptimo

término contado desde el final es $\frac{1}{6}$

- A) 2 B) 7 C) 3
D) 9 E) 6

55. Determinar el valor de "n" si se sabe que el término central del desarrollo de es:

$$P(x) = (x+1)^n \text{ es } 6\sqrt{x}^{n^2-9n+24}$$

- A) 3 B) 4 C) 6
D) 2 E) 4 ó 6
6

56. En el desarrollo de: $(\sqrt[3]{3} + \sqrt{2})^{12}$

¿Cuántos números son naturales?

- A) 12 B) 2 C) 3
D) 5 E) 6

57. Resolver:

$$C_2^x + C_2^{x-1} + C_x^{x-2} = 136\pi$$

- A) {5} B) {7} C) {12}
D) {3} E) {11}

58. Resolver el sistema:

$$C_{y+1}^x = C_{y-1}^x \dots\dots\dots(1)$$

$$C_y^x = \frac{21}{10} C_{y-2}^x \dots\dots\dots(2)$$

E indicar la suma de las componentes de su solución.

- A) 7 B) 9 C) 11
D) 15 E) 17

59. Resolver:

$$2C_4^x = 2C_3^x - C_2^x$$

- A) {4; 6} B) {4; 5} C) {5; 7}
D) {5; 6} E) {3; 6}

60. Resolver:

$$\binom{x}{0} + \binom{x}{1} + \binom{x}{2} + \binom{x}{3} = \frac{x(x^2+6)}{6}$$

- A) {6} B) $\left\{\frac{2}{5}\right\}$ C) $\left\{\frac{2}{3}\right\}$
D) $\left\{\frac{3}{2}\right\}$ E) $\left\{\frac{1}{3}\right\}$

61. Calcular el término independiente de x en el desarrollo de:

$$(2x^2 - 3)^5$$

- A) -1215 B) 243 C) -243
D) -405 E) -1200

62. Si: $2n! - (n-1)(n-1)! = 6! + 5!$

Calcular: " $n^2 + 1$ "

- A) 82 B) 17 C) 10
D) 5 E) 37

63. Resolver:

$$\frac{(x+3)^3 |x+1|}{|x+1| + |x+2| + |x+3|} = 7$$

- A) {9} B) {3} C) {2}
D) {5} E) {4}

64. Si se cumple que:

$$C_y^{x+1} = C_4^{y+5}$$

Calcular " $x+y$ "

- A) 3 B) 4 C) 5
D) 9 E) 12

65. Calcular el término independiente de x en la expansión de:

$$\left(\frac{x}{3} - \frac{3}{x}\right)^6$$

- A) 20 B) -10 C) -20
D) 10 E) 40

66. Sabiendo que el desarrollo de:

$$\left[(a+b)^n\right]^2 (a-b)^{2n} [a^4 + a^2b^2 + b^4]^{2n}$$

Tiene 17 términos. Determine su término central.

- A) $C_8^{16}(ab)^{12}$ B) $C_8^{16}(ab)^4$
C) $C_8^{16}(ab)^{48}$
D) $C_8^{16}(ab)^{36}$ E) $C_8^{16}(ab)^8$

67. Calcular el mayor de los coeficientes en el desarrollo de: $P(x; y) = (x+y)^n$; sabiendo que la sumatoria de sus coeficientes es igual que:

$$\sum_{k=1}^n (2k-1)$$

- A) 2 B) 2 C) 9
D) 6 E) 7

68. Determine el tercer término en la expansión de $P(x) = (x+3)^n$, si se sabe que su cuarto término es $270x^m$.

- A) $90x^3$ B) $30x^3$ C) $120x^3$
D) $90x^4$ E) $9x^3$

69. Determine un valor de " K " de tal manera que los términos de lugares $k^2 + 8$ y $6k$ del desarrollo de $P(x; y) = (x+y)^{193}$ equidisten de los extremos.

- A) 18 B) 11 C) 12
D) 10 E) 19

70. Si el coeficiente de x^{45} en el desarrollo de:

$$P(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^{78} \text{ es } C_m^{78}$$

Calcular el coeficiente de x^{4m-8}

- A) C_{15}^{78} B) C_{20}^{78} C) C_{16}^{78}
D) C_{12}^{78} E) C_{14}^{78}

71. Si el producto de la suma de los coeficientes de los desarrollos de: $(a + b)^m$, $(c + d)^n$ $(e + f)^p$ es 4096. Calcular:

$$K = \frac{m + n + p - 12}{mnp}$$

- A) 6 B) 2 C) 4
D) 0 E) 1

72. Si el grado absoluto del séptimo término del desarrollo de $P(x; y; z) = (x^2y + z)^n$ es 30. Calcular el grado de su término central.

- A) 28 B) 20 C) 10
D) 26 E) 30

73. Resolver:

$$C_{x^2}^{24} = C_{2x}^{24}$$

- A) {2; 4} B) {0; 2; 4} C) {1; 2; 4}
D) {2; 4; 6} E) {-6; 0; 2}

74. Calcular el coeficiente del sexto término del desarrollo de $P(x; y) = (x + 2y)^n$, sabiendo que su quinto término es:

$$2mC_4^m x^{m-4} y^4$$

- A) 1590 B) 1792 C) 1790
D) 1723 E) 1292

75. En la expansión de $(1 + x)^{40}$ los coeficientes de los términos de lugares $(2r + 1)$ y $(r + 2)$ son iguales. Hallar "r" si es mayor que 2.

- A) 13 B) 15 C) 12
D) 14 E) 10

76. Si en el desarrollo de:

$$P(x) = \left(2x^2 + \frac{3}{x}\right)^{22}$$

existe un término de la forma ax^{29} . ¿Qué lugar ocupa dicho término?

- A) 10 B) 8 C) 12
D) 6 E) 4

77. Cuántos términos presenta el desarrollo de:

$$P(x) = \left[(\sqrt{x} - 1)^9(\sqrt{x} + 1)^9(x^2 + x + 1)^9\right]^4$$

- A) 13 B) 15 C) 12
D) 14 E) 10

78. Determine el lugar del término cuya parte literal es x^2 en el desarrollo de:

$$P(x) = \left(x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{14}$$

- A) 9 B) 14 C) 12
D) 10 E) 11

79. Si el término central del desarrollo de:

$$P(x; y) = \left(x^3 + \frac{y^2}{x}\right)^n$$

es de octavo grado ¿Cuál es su coeficiente?

- A) 3 B) 6 C) 20
D) 10 E) 70

80. Resolver:

$$(n-1)! + n! = 0,2(n+1)!$$

- A) {1} B) {7} C) {6}
D) {5} E) {4}

81. Determinar el valor de "x" en:

$$\frac{x! + (x+1)! + (x+2)!}{(x+3)! - (x+2)!} = \frac{1}{2012}$$

- A) 2010 B) 2011 C) 2012
D) 2013 E) 2014

82. Luego de reducir:

$$2^{10} + 10 \cdot 2^9 + 45 \cdot 2^8 + 120 \cdot 2^7 + \dots + 120 + 1$$

Calcular la suma de cifras del resultado obtenido.

- A) 25 B) 26 C) 27
D) 28 E) 29

83. Reducir:

$$\frac{C_0^n}{1 \cdot 2} + \frac{C_1^n}{2 \cdot 3} + \frac{C_2^n}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{C_n^n}{(n+1)(n+2)}$$

- A) $\frac{2^{n+2} + 3}{(n+1)(n+2)}$ B) $\frac{2^{n+1} - 1}{(n+1)(n+2)}$
C) $\frac{2^{n+2} - n - 3}{(n+2)(n+3)}$
D) $\frac{2^{n+2} - n - 3}{(n+1)(n+2)}$ A) $\frac{2^{n+2} - n - 2}{(n+1)(n+3)}$

84. ¿Cuántos términos tiene el desarrollo de:

$(x^3 + y^2)^{2n}$, si la suma de los grados de los términos de su desarrollo es 275?

- A) 12 B) 11 C) 10
D) 9 E) 8

85. Un término del desarrollo de la siguiente potencia:

$$\left(\frac{xy}{z} + z^4 \sqrt{z} \sqrt[4]{y} \right)^n$$

es tal que los exponentes de x, y y z son 3 números enteros consecutivos. ¿Cuál es el valor de "n"?

- A) 13 B) 12 C) 11
D) 14 E) 10

86. Calcular el cociente de los dos únicos términos racionales fraccionarios del desarrollo de:

$$\left(6 + \sqrt{x} + 9\sqrt{x^{-1}} \right)^4 ; x > 0$$

- A) $\frac{9x}{28}$ B) $\frac{28x}{9}$ C) $\frac{8x}{9}$
D) $\frac{9x}{8}$ E) $\frac{13x}{9}$

87. Hallar el coeficiente de x^r en el desarrollo de:

$$(1 + 4x)^{\frac{1}{2}}$$

- A) $\frac{(2r-1)!}{[(r+1)!]^2} (-1)^r$ B) $\frac{(2r-1)!}{(r!)^2}$
C) $\frac{(2r)!}{[(r+1)!]^2}$
D) $\frac{(2r)!}{(r!)^2} (-1)^r$ E) $\frac{(2r-1)!}{(r!)^2} (-1)^r$

88. ¿Cuántos términos tiene el desarrollo de:

$$P(x; y; z) = (x + y + z)^6 ?$$

- A) 20 B) 28 C) 15
D) 10 E) 7

89. Determine "a" de modo que en el desarrollo de:

$$P(x; y) \equiv \left(ax^3 + \frac{2y}{x^2}\right)^4$$

un término sea $24x^m y^m$

- A) 1 B) 8 C) 2
D) -1 E) 1 ó -1

90. Sabiendo que:

$$P_n = C_0^n - \frac{1}{2}C_1^n + \frac{1}{2^2}C_2^n \dots + (-1)^n \frac{1}{2^n}C_n^n$$

Calcular $\sum_{n=0}^8 P_n$

- A) $\frac{127}{129}$ B) $\frac{255}{256}$ C) $\frac{511}{256}$
D) $\frac{511}{512}$ E) $\frac{1023}{1024}$

91. Calcular:

$$S = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \dots + (n-2).(n-1).n$$

- A) $3!C_4^{n+1}$ B) $2!C_4^{n+1}$
C) $3!C_3^{n+1}$
D) $2!C_2^{n+1}$ E) $3!C_3^n$

92. Dado el polinomio:

$$P(x) \equiv (1+x) + (1+x)^2 + (1+x)^3 + \dots + (1+x)^n$$

Calcular el coeficiente de x^2

- A) C_2^{n+1} B) C_3^{n+2} C) C_3^{n+1}
D) C_3^n E) C_2^n

93. Calcular:

$$\sum_{r=0}^n (m+r)C_r^n$$

- A) $(m+n)2^n$ B) $(m+2n)2^{n+1}$
C) $(2m+n)2^{n-1}$
D) $(m+n)2^{n+1}$ E) $(2m+n)2^n$

94. Reducir:

$$S = (C_1^n)^2 + 2(C_2^n)^2 + 3(C_3^n)^2 + \dots + n(C_n^n)^2$$

- A) nC_n^{2n-1} B) nC_{n-1}^{2n-1} C) C_n^{2n-1}
D) C_{n-1}^{2n-1} E) nC_n^{2n}

95. Calcular el coeficiente del término cuya parte es $x^2 y^3 z^3$ en el desarrollo de

$$(x+2y-z)^8$$

- A) 4440 B) 4480 C) -4440
D) -4080 E) -4480

endiente de x en el desarrollo de $(1+ax+bx^2)^{10}$; $ab \neq 0$.

- A) 1 B) 0 C) $10!$
D) ab E) $(ab)^{10}$

97. Calcular el coeficiente del término que tiene parte literal x^3 en el desarrollo de:

$$\left(x^2 + \frac{1}{x} + 1\right)^6$$

- A) 60 B) 40 C) 80
D) 100 E) 70

98. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden colocar 2 libros de Álgebra (diferentes) y 2 libros de Aritmética (diferentes) y 2 libros de Física (diferentes) en una fila de cierto estante si los libros de cada materia deben ser ubicados juntos?

- A) 60 B) 48 C) 24
D) 36 E) 12

99. Determine el número de permutaciones de "n" elementos diferentes en las cuales dos elementos "a" y "b" no son inmediatos.

- A) $(n-2)n!$ B) $n!$
C) $(n-2)(n-1)!$
D) $(n+1)(n-1)!$ E) $n(n-2)!$

100. La fila de la platea de un cine tiene 7 asientos. ¿De cuántas maneras pueden acomodarse una pareja con sus 4 hijos de manera que los padres se ubiquen en los extremos y sin dejar asiento vacío entre ellos?

- A) 720 B) 120 C) 96
D) 84 E) 48

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

PROBLEMA 1 Sea "K" el valor pedido, luego:

$$K = \left[\frac{6.5! + 5!}{5.4! + 4!} \right]^1 = \frac{7.5!}{6.4!}$$

$$K = \frac{7.5.4!}{6.4!} = \frac{7.5}{6}$$

$$\therefore K = \frac{35}{6}$$

Rpta.: B

PROBLEMA 2 Sea "K" el valor pedido, luego:

$$K = \frac{C_5^{13} + C_7^{13}}{C_7^{15}} = \frac{C_5^{13} + C_6^{13}}{C_7^{15}}$$

$$K = \frac{C_6^{14}}{C_7^{15}} = \frac{C_6^{14}}{\frac{15}{7} C_6^{14}}$$

$$\therefore K = \frac{7}{15}$$

Rpta.: E

PROBLEMA 3 Expresando cada factorial del primer miembro en función de $\underline{x}$ tenemos:

$$\frac{(\underline{x} + (x+1))(\underline{x} + (x+2)(x+1))\underline{x}}{(x+1)\underline{x} - \underline{x}} = x + 5$$

$$\frac{\underline{x}[1 + (x+1) + (x+2)(x+1)]}{\underline{x}[(x+1) - 1]} = x + 5$$

$$\frac{x+2+x^2+3x+2}{x} = x+5$$

$$x^2+4x+4 = x^2+5x$$

$$4 = x$$

Finalmente tenemos:

$$x^2+1 = 4^2+1$$

$$\therefore x^2+1 = 17$$

Rpta.: A

PROBLEMA 4

Dando uso de los teoremas, la igualdad mostrada se puede reescribir así:

$$C_2^{x+1} = C_3^6 + \frac{x^2}{2}$$

$$\frac{(x+1)(x)}{1.2} = \frac{6.5.4}{1.2.3} + \frac{x^2}{2}$$

$$\frac{x^2+x}{2} = 20 + \frac{x^2}{2}$$

$$\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} = 20 + \frac{x^2}{2}$$

$$\frac{x}{2} = 20$$

$$x = 40$$

$$\therefore x^2 - 1 = 1599$$

Rpta.: C

PROBLEMA 5

De acuerdo con el teorema $\lfloor n = n \lfloor n - 1 \rfloor ; \forall n \in \mathbb{Z}^+$ procedemos a transformar cada sumando:

$$1 \lfloor 1 = (2 - 1) \lfloor 1 = 2 \lfloor 1 - \lfloor 1 = \lfloor 2 - \lfloor 1$$

$$2 \lfloor 2 = (3 - 1) \lfloor 2 = 3 \lfloor 2 - \lfloor 2 = \lfloor 3 - \lfloor 2$$

$$3 \lfloor 3 = (4 - 1) \lfloor 3 = 4 \lfloor 3 - \lfloor 3 = \lfloor 4 - \lfloor 3$$

$$4 \lfloor 4 = (5 - 1) \lfloor 4 = 5 \lfloor 4 - \lfloor 4 = \lfloor 5 - \lfloor 4$$

.

.

.

$$2012 \lfloor 2012 = \dots\dots\dots = \lfloor 2013 - \lfloor 2012$$

Si "S" es la suma , tenemos:

$$S = \lfloor 1 + 2 \lfloor 2 + 3 \lfloor 3 + 4 \lfloor 4 + \dots\dots\dots + 2012 \lfloor 2012$$

$$S = -\lfloor 1 + \lfloor 2013 = -1 + \lfloor 2013$$

$$\therefore S = \lfloor 2013 - 1$$

Rpta.: D

PROBLEMA 6

Sea "S" el equivalente de la expresión dada, luego:

$$S = C_0^1 + C_1^2 + C_2^3 + C_3^4 + \dots\dots\dots + C_{38}^{39}$$

Dando uso del teorema $C_k^n = C_{n-k}^n$, cada sumando se puede reescribir así:

$$S = C_0^1 + C_1^2 + C_1^3 + C_1^4 + \dots\dots\dots + C_1^{39}$$

$$S = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots\dots\dots + 39$$

$$S = \frac{39 \cdot 40}{2} = 39 \cdot 20$$

$$\therefore S = 780$$

Rpta.: C

PROBLEMA 7 La igualdad mostrada se puede reescribir así:

$$\begin{array}{rcl}
 x + C_2^x + C_3^{x+1} + C_4^{x+2} & = & 70 \\
 \underbrace{C_1^x + C_2^x} + C_3^{x+1} + C_4^{x+2} & = & 70 \\
 \vdots & & \vdots \\
 C_2^{x+1} & & \vdots \\
 \underbrace{\quad} & & \vdots \\
 C_3^{x+2} & & \vdots \\
 \underbrace{\quad} & & \vdots \\
 C_4^{x+3} & = & 70
 \end{array}$$

Según la regla práctica tenemos:

$$\frac{(x+3)(x+2)(x+1)(x)}{1.2.3.4} = 70$$

$$(x+3)(x+2)(x+1)(x) = 6.4.2.5.7$$

$$(x+3)(x+2)(x+1)(x) = (4.2).7.6.5$$

$$(x+3)(x+2)(x+1)(x) = 8.7.6.5$$

Aquí fácilmente reconocemos que $x = 5$, finalmente tenemos:

$$x^3 + 1 = 5^3 + 1 = 125 + 1 = 126$$

$$\therefore \sum \text{de cifras de } (x^3 + 1) = 9$$

Rpta.: E

PROBLEMA 8 Supongamos "k" el equivalente de la expresión, luego tenemos:

$$K = \binom{-1}{2} + \binom{2}{4} + \binom{\sqrt{3}+1}{3}$$

Desarrollando cada coeficiente binomial:

$$K = \frac{(-1)(-2)}{1.2} + \frac{(2)(1)(0)(-1)}{1.2.3.4} + \frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)}{1.2.3}$$

$$K = \frac{2}{2} + \frac{0}{24} + \frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)\sqrt{3}}{6}$$

$$K = 1 + 0 + \frac{(3-1)\sqrt{3}}{6} = 1 + \frac{2\sqrt{3}}{6} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\therefore K = \frac{3+\sqrt{3}}{3}$$

Rpta.: C

PROBLEMA 9

Expresando cada factorial en función del menor de ellos, la igualdad propuesta se puede reescribir así:

$$\frac{(x+2)(x+1)[x+(x+1)]x + x}{(x+2)(x+1)[x-(x+1)]x - [x]} = \frac{11}{10}$$

$$\frac{[(x+2)(x+1)+(x+1)+1]x}{[(x+2)(x+1)-(x+1)-1]x} = \frac{11}{10}$$

$$\frac{(x+2)(x+1)+(x+2)}{(x+2)(x+1)-(x+2)} = \frac{11}{10}$$

$$\frac{(x+2)[(x+1)+1]}{(x+2)[(x+1)-1]} = \frac{11}{10}$$

$$\frac{x+2}{x} = \frac{11}{10}$$

$$10x + 20 = 11x$$

$$\therefore x = 20$$

Rpta.: A

PROBLEMA 10 La igualdad propuesta es:

$$9C_9^n = nC_5^{n-1}$$

Degradando en el primer miembro tenemos:

$$9 \cdot \frac{n}{9} C_8^{n-1} = n C_5^{n-1}$$

$$nC_8^{n-1} = nC_5^{n-1}$$

$$C_8^{n-1} = C_5^{n-1}$$

Por propiedad se cumple que:

$$n-1 = 8+5$$

$$n-1 = 13$$

$$\therefore n = 14$$

Rpta.: B

PROBLEMA 11 De acuerdo con la fórmula del término de lugar “k + 1” tenemos:

$$t_{k+1} = C_k^n x^{n-k} y^k$$

$$t_6 = C_5^{12} (x^2)^7 (-5y)^5$$

$$t_6 = (-5)^5 C_5^{12} x^{14} y^{15}$$

Finalmente tenemos:

$$[t_6]^{\circ} = 14 + 15$$

$$\therefore [t_6]^{\circ} = 29$$

Rpta.: D

PROBLEMA 12 De acuerdo con la fórmula del Binomio de Newton tenemos:

$$P(x) \equiv (4 - x^3)^{-2} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-2}{k} \cdot [-x^3]^k$$

Observa que el coeficiente es:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{-2}{k} \cdot [-1]^k$$

Supongamos que "S" es la suma de los 20 primeros coeficientes, luego:

$$S = \sum_{k=0}^{19} \binom{-2}{k} [-1]^k$$

$$S = \binom{-2}{0} - \binom{-2}{1} + \binom{-2}{2} - \binom{-2}{3} + \dots - \binom{-2}{19}$$

$$S = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 20$$

$$S = \frac{20 \cdot 21}{2} = 10 \cdot 21$$

$$\therefore S = 210$$

Rpta.: E

PROBLEMA 13 Del enunciado tenemos:

$$13 \text{ preguntas} = \begin{cases} 5 \text{ primeras} \\ 8 \text{ restantes} \end{cases}$$

I. Escoge 3 de 5 y 7 de 8.

$$\Rightarrow n(I) = C_3^5 \cdot C_7^8 = 10 \cdot 8 = 80$$

II. Escoge 4 de 5 y 6 de 8.

$$\Rightarrow n(II) = C_4^5 \cdot C_6^8 = 5 \cdot 28 = 140$$

III. Escoge 5 de 5 y 5 de 8.

$$\Rightarrow n(\text{III}) = C_5^5 \cdot C_5^8 = 1 \cdot 56 = 56$$

Por el principio fundamental de la adición:

$$\text{Número de maneras totales} = 80 + 140 + 56$$

$$\therefore \text{Número de maneras totales} = 276$$

Rpta.: C

PROBLEMA 14 De acuerdo con el mapa tenemos:

$$\text{I. } n(\text{ABX}) = 3 \cdot 3 = 9$$

$$\text{II. } n(\text{ACX}) = 3 \cdot 2 = 6$$

$$\text{III. } n(\text{ADX}) = 2 \cdot 3 = 6$$

Por el principio fundamental de la adición

$$\text{Número de caminos totales} = 9 + 6 + 6$$

$$\therefore \text{Número de caminos totales} = 21$$

Rpta.: C

PROBLEMA 15 Sea "x" el número de maneras totales, luego según el enunciado y los principios fundamentales tenemos:

$$x = C_1^5 \cdot C_3^4 + C_2^5 \cdot C_2^4 + C_3^5 \cdot C_1^4$$

$$x = 5 \cdot 4 + 10 \cdot 6 + 10 \cdot 4$$

$$x = 20 + 60 + 40$$

$$\therefore x = 120$$

Rpta.: C

PROBLEMA 16 De acuerdo con el enunciado tenemos:

- I. El dado puede caer de 6 maneras
- II. La moneda puede caer de 2 maneras

Sea "x" el número de maneras diferentes en que pueden caer el dado y la moneda si son lanzados simultáneamente, por el principio fundamental de la multiplicación tenemos:

$$x = 6 \cdot 2$$

$$\therefore x = 12$$

Rpta.: C

PROBLEMA 17 De acuerdo con el enunciado tenemos:

- I. El primer viajero se podrá hospedar de 5 maneras.
- II. El segundo viajero se podrá hospedar de 4 maneras.

Por el principio fundamental de la multiplicación tenemos:

$$x = 5 \cdot 4$$

$$\therefore x = 20$$

Rpta.: D

PROBLEMA 18 Sea "x" la cantidad de maneras que se puede seleccionar una delantera.

$$x = C_3^6$$

$$x = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$\therefore x = 20$$

Rpta.: C

PROBLEMA 19 Sea "x" la cantidad de directivas que se puede formar, luego:

$$x = C_4^{10}$$

$$x = \frac{10.9.8.7}{1.2.3.4}$$

$$\therefore x = 210$$

Rpta.: C

PROBLEMA 20 De acuerdo con el enunciado tenemos:

I. Los argentinos juntos se podrán ordenar de
 $3! = 6$ maneras

II. Los peruanos juntos se podrán ordenar de
 $4! = 24$ maneras

III. Los chilenos juntos se podrán ordenar de
 $4! = 24$ maneras

IV. Los bolivianos juntos se podrán ordenar de
 $2! = 2$ maneras

Ahora hagamos un posible esquema

A	P	CH	B
---	---	----	---

Sea "x" el número de maneras totales, luego:

$$x = 4! (6 \cdot 24 \cdot 24 \cdot 2)$$

$$x = 24 (6912)$$

$$\therefore x = 165888$$

Rpta.: E

PROBLEMA 21 Por condición tenemos:

$$\left[\frac{C_{x-4}^{x-1} + 2C_{x-3}^{x-1} + C_{x-2}^{x-1}}{2} \right]! = 120$$

Fácilmente reconocemos que:

$$C_{x-4}^{x-1} + 2C_{x-3}^{x-1} + C_{x-2}^{x-1} = 10$$

$$\underbrace{C_{x-4}^{x-1} + C_{x-3}^{x-1}} + \underbrace{C_{x-3}^{x-1} + C_{x-2}^{x-1}} = 10$$

$$\underbrace{C_{x-3}^x + C_{x-2}^x} = 10$$

$$C_{x-2}^{x+1} = 10$$

$$C_3^{x+1} = 10$$

$$\frac{(x+1)(x)(x-1)}{6} = 10$$

$$(x+1)(x)(x-1) = 60$$

$$(x+1)(x)(x-1) = 5.4.3$$

$$\therefore x = 4$$

Rpta.: A

PROBLEMA 22 Sea la expresión:

$$E = \binom{-20}{1} + \binom{-19}{2} + \binom{-18}{3} + \dots + \binom{-1}{20}$$

$$E + \begin{pmatrix} -20 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \end{pmatrix}$$

$$\therefore E = -1$$

$$\frac{|2n-6|}{|n-3| [1.3.5.7. \dots (2n-7)]} = 4096$$

$$\frac{|2n-6|}{[1.3.5.7. \dots (2n-7)]} = 4096|n-3|$$

$$\frac{2n-6 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \dots (2n-6)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \dots (2n-7)(2n-6)} = 4096 \mid n-3$$

$$\frac{2n-6 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \dots (2n-6)}{2n-6} = 4096 \mid n-3$$

$$2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \dots (2n-6) = 4096 \mid n-3$$

$$(1 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 3) \dots [2(n-3)] = 4096 \mid n-3$$

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \dots 2}_{(n-3) \text{ veces}} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-3) = 4096 \mid n-3$$

$$2^{n-3} \mid n-3 = 4096 \mid n-3$$

$$2^{n-3} = 2^{12}$$

$$n-3 = 12$$

$$\therefore n = 15$$

Rpta.: A

PROBLEMA 24 La potencia dada es $(x^3 + x^{-1})^{12}$, luego por fórmula tenemos:

$$t_{k+1} = C_k^{12} (x^3)^{12-k} (x^{-1})^k$$

$$t_{k+1} = C_k^{12} x^{36-3k} \cdot x^{-k}$$

$$t_{k+1} = C_k^{12} x^{36-4k}$$

Por condición se cumple que:

$$20 = 36 - 4k$$

$$4k = 16$$

$$k = 4$$

Finalmente tenemos que:

$$\text{Coef} = C_k^{12} = C_4^{12}$$

$$\text{Coef} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

$$\therefore \text{Coef} = 495$$

Rpta.: E

PROBLEMA 25 La potencia dada es: $(x^2 - y)^n$, luego por fórmula tenemos:

$$t_{k+1} = C_k^n (x^2)^{n-k} (-y)^k$$

$$t_4 = C_3^n (x^2)^{n-3} (-y)^3$$

$$t_4 = -C_3^n x^{2n-6} y^3$$

Por condición se plantea que:

$$2n - 6 = 10$$

$$2n = 16$$

$$\therefore n = 8$$

Rpta.: C

PROBLEMA 26 La potencia dada es $(x^4 + y)^{n \cdot 2m}$, luego por fórmula tenemos:

$$t_6 = C_5^{2m} (x^4)^{2m-5} (y^n)^5 = C_5^{2m} x^{8m-20} y^{5n}$$

$$t_6 = C_{15}^{2m} (x^4)^{2m-15} (y^n)^{15} = C_{15}^{2m} x^{8m-60} y^{15n}$$

Por condición tenemos:

$$[t_6]^{\circ} - [t_{16}]^{\circ} = 10$$

$$8m - 20 + 5n - (8m - 60 + 15n) = 10$$

$$8m - 20 + 5n - 8m + 60 - 15n = 10$$

$$40 - 10n = 10$$

$$-10n = -30$$

$$\therefore n = 3$$

Rpta.: B

PROBLEMA 27 La potencia dada es :

$$\left(\sqrt{x}^3 + x^{\frac{1}{3}} \right)^n$$

por condición se plantea:

$$(1+1)^n = \underbrace{2^n = 128}_{n=7}$$

Por fórmula tenemos:

$$t_{k+1} = C_k^7 (\sqrt{x}^3)^{7-k} \left(x^{\frac{1}{3}} \right)^k$$

$$t_{k+1} = C_k^7 x^{\frac{21-3k}{2} - \frac{k}{3}}$$

Por condición tenemos:

$$\frac{21-3k}{2} - \frac{k}{3} = 5$$

$$\frac{63-9k-2k}{6} = 5 \Leftrightarrow 63-11k = 30$$

$$-11k = -33$$

$$k = 3$$

Finalmente tenemos:

$$\text{Coef} = C_k^7 = C_3^7$$

$$\text{Coef} = \frac{7.6.5}{1.2.3}$$

$$\therefore \text{Coef} = 35$$

Rpta.: D

PROBLEMA 28 La potencia dada es:

$$\left(\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}^{-1}\right)^9$$

Luego por fórmula tenemos:

$$t_{k+1} = C_k^9 \sqrt{x}^{9-k} \left(\sqrt[4]{x}^{-1}\right)^k$$

$$t_{k+1} = C_k^9 x^{\frac{9-k}{2} - \frac{k}{4}}$$

Como t_{k+1} es independiente de x (no contiene a x), se cumple que:

$$\frac{9-k}{2} - \frac{k}{4} = 0$$

$$18 - 2k - k = 0$$

$$-3k = -18$$

$$k = 6$$

Finalmente tenemos que:

$$TI = t_7 = C_6^9 = C_3^9$$

$$TI = \frac{9.8.7}{1.2.3}$$

$$\therefore TI = 84$$

Rpta.: B

PROBLEMA 29 La potencia dada es:

$$(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y})^{10}$$

Luego por fórmula tenemos:

$$\left. \begin{aligned} t_5 &= C_4^{10} (\sqrt[3]{x})^6 (-\sqrt[3]{y})^4 = 1 \\ t_6 &= C_5^{10} (\sqrt[3]{x})^5 (-\sqrt[3]{y})^5 = 2 \end{aligned} \right\} \text{Al dividir:}$$

$$\frac{C_4^{10} (\sqrt[3]{x})^6 (-\sqrt[3]{y})^4}{C_5^{10} (\sqrt[3]{x})^5 (-\sqrt[3]{y})^5} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{5}{6} \cdot \frac{\sqrt[3]{x}}{(-\sqrt[3]{y})} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{y}} = -\frac{6}{10}$$

$$\therefore \sqrt[3]{\frac{x}{y}} = -0,6$$

Rpta.: E

PROBLEMA 30 La potencia dada es :

$$\left(\frac{\sqrt{13}x}{2} + y^2 \right)^n$$

Luego por fórmula tenemos:

$$t_9 = C_8^n \left(\frac{\sqrt{13}x}{2} \right)^{n-8} (y^2)^8 = \left(\frac{\sqrt{13}}{2} \right)^{n-8} C_8^n x^{n-8} y^{16}$$

$$\Rightarrow \text{Coeficiente} = \left(\frac{\sqrt{13}}{2} \right)^{n8} C_8^n$$

$$t_7 = C_6^n \left(\frac{\sqrt{13}x}{2} \right)^{n-6} (y^2)^6 = \left(\frac{\sqrt{13}}{2} \right)^{n-6} C_6^n x^{n-6} y^{12}$$

$$\Rightarrow \text{Coeficiente} = \left(\frac{\sqrt{13}}{2} \right)^{n-6} C_6^n$$

Por condición se plantea que:

$$\left(\frac{\sqrt{13}}{2} \right)^{n-8} C_8^n = \left(\frac{\sqrt{13}}{2} \right)^{n-6} C_6^n$$

$$C_8^n = \left(\frac{\sqrt{13}}{2} \right)^{n-6-n+8} C_6^n$$

$$\frac{n!}{(n-8)! \cdot 8!} = \left(\frac{\sqrt{13}}{2} \right)^2 \cdot \frac{n!}{(n-6)! \cdot 6!}$$

$$(n-6)(n-7) = \frac{13}{4} \cdot 8 \cdot 7$$

$$(n-6)(n-7) = 14 \cdot 13$$

Aquí reconocemos que:

$$n-6 = 14$$

$$\therefore n = 20$$

Rpta.: A

PROBLEMA 31 La igualdad propuesta es:

$$C_1^n + 2C_2^n + 2C_2^n + \dots + nC_n^n = 192$$

Degradando en el primer miembro tenemos:

$$nC_0^{n-1} + 2\frac{n}{2}C_1^{n-1} + 3\frac{n}{3}C_2^{n-1} + \dots + n\frac{n}{n}C_{n-1}^{n-1} = 192$$

$$C_0^{n-1} + nC_1^{n-1} + nC_2^{n-1} + \dots + nC_{n-1}^{n-1} = 192$$

$$n \left[\underbrace{C_0^{n-1} + C_1^{n-1} + C_2^{n-1} + \dots + C_{n-1}^{n-1}}_{\text{Por teorema}} \right] = 192$$

$$n \left[2^{n-1} \right] = n \cdot 2^{n-1} = 6 \cdot 32 = 6 \cdot 2^5$$

$$\therefore n = 6$$

Rpta.: B

PROBLEMA 32

Por condición se cumple que:

$$\sum \text{de coef en } (3x^2 - 1)^n = \sum \text{de coef en } (5x^3 - 1)^{2n-6}$$

$$(3 - 1)^n = (5 - 1)^{2n-6}$$

$$2^n = 4^{2n-6}$$

$$2^n = 2^{4n-12}$$

$$n = 4n - 12$$

$$12 = 3n$$

$$\therefore n = 4$$

Rpta.: C

PROBLEMA 33

Sea "S" el equivalente de la expresión, luego tenemos:

$$S = \binom{n}{2} + \binom{n-1}{2}$$

$$S = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

$$S = \frac{n(n-1) + (n-1)(n-2)}{2}$$

$$S = \frac{(n-1)(2n-2)}{2}$$

$$S = (n-1)(n-1)$$

$$S = (n-1)^2$$

∴ "S" es un cuadrado perfecto

Rpta.: B

PROBLEMA 34 La igualdad propuesta es:

$$\frac{nC_1^n}{C_0^n} + \frac{2(n-1)C_2^n}{C_1^n} + \frac{3(n-2)C_3^n}{C_2^n} + \dots + \frac{nC_n^n}{C_{n-1}^n} = 204$$

$$1 \cdot n \left[\frac{C_1^n}{C_0^n} \right] + 2(n-1) \left[\frac{C_2^n}{C_1^n} \right] + 3(n-2) \left[\frac{C_3^n}{C_2^n} \right] + \dots + n(1) \left[\frac{C_n^n}{C_{n-1}^n} \right] = 204$$

Por propiedad:

$$\frac{C_{k+1}^n}{C_k^n} = \frac{n-k}{k+1}$$

$$1 \cdot n \left[\frac{n}{1} \right] + 2(n-1) \left[\frac{n-1}{2} \right] + 3(n-2) \left[\frac{n-2}{3} \right] + \dots + n(1) \left[\frac{1}{n} \right] = 204$$

$$n^2 + (n-1)^2 + (n-2)^2 + \dots + 2^2 + 1^2 = 204$$

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = 204$$

$$n(n+1)(2n+1) = 6 \cdot 204$$

$$n(n+1)(2n+1) = 8 \cdot 9 \cdot 17$$

$$\therefore n = 8$$

Rpta.: A

PROBLEMA 35

La potencia dada es:

$$\left(\frac{x^2}{y} + \frac{y}{\sqrt{x}} \right)^{5n+2}$$

Luego por fórmula tenemos:

$$t_{25} = C_{24}^{5n+2} \left(\frac{x^2}{y} \right)^{5n-22} \left(\frac{y}{\sqrt{x}} \right)^{24}$$

$$t_{25} = C_{24}^{5n+2} \frac{x^{10n+44}}{y^{5n-22}} \cdot \frac{y^{24}}{x^{12}}$$

$$t_{25} = C_{24}^{5n+2} x^{10n-56} y^{46-5n}$$

Por condición tenemos:

$$10n - 56 = 44$$

$$10n = 100$$

$$\therefore n = 10$$

Rpta.: E

PROBLEMA 36

La potencia dada es:

$$\left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[4]{x} - 1 \right)^{154}$$

Luego por fórmula tenemos:

$$t_{k+1} = C_k^{154} \left(\sqrt[3]{x^2} \right)^{154-k} \left(\sqrt[4]{x} - 1 \right)^k$$

$$t_{k+1} = C_k^{154} x^{\frac{308-2k}{3} \cdot \frac{k}{4}}$$

Por condición: t_{k+1} es independiente de x , luego se cumple que:

$$\frac{308-2k}{3} - \frac{k}{4} = 0$$

$$1232 - 8k - 3k = 0$$

$$-11k = -1232$$

$$K = 112$$

$$\therefore \text{El lugar es } k + 1 = 113$$

Rpta.: B

PROBLEMA 37 La potencia dada es :

$$(3x^3 + x^{-1})^n$$

por condición se cumple que:

$$(3 + 1)^n = \underbrace{2^{2n} = 2^{34}}_{n = 17}$$

Por fórmula tenemos:

$$t_{k+1} = C_k^{17} (3x^3)^{17-k} (x^{-1})^k$$

$$t_{k+1} = C_k^{17} \cdot 3^{17-k} \cdot x^{51-4k}$$

Aquí se cumple que:

$$k + 1 = 51 - 4k$$

$$5k = 50$$

$$k = 10$$

$$\therefore \text{la posición del término es } 11$$

Rpta.: E

PROBLEMA 38 Supongamos que "m" es el número de términos racionales y "n" el número de términos irracionales, luego se cumple que:

$$m + n = 121 \dots\dots\dots (1)$$

Por fórmula tenemos:

$$t_{k+1} = C_k^{120} (\sqrt[3]{x})^{120-k} (\sqrt[3]{x}^{-1})^k$$

$$t_{k+1} = C_k^{120} X^{24-\frac{k}{5}} X^{\frac{k}{3}}$$

$$t_{k+1} = C_k^{120} X^{24-\frac{8k}{15}}$$

I. Hallemos "m", para lo cual es necesario que $\frac{8k}{15}$ sea un número entero.

Fácilmente reconocemos que $k = 15$ (múltiplo de quince)

Además por existencia del combinatorio.

$$0 \leq k \leq 120$$

$$k = 0; 15; 30; 45; 60; 75; 90; 105 \text{ y } 120$$

Como existen 9 valores para "k", aseguramos que existen 9 términos racionales

$$\Rightarrow m = 9$$

II. Hallemos "n", para lo cual utilizamos (1) y el valor de "m", veamos:

$$m + n = 121$$

$$9 + n = 121$$

$$n = 112$$

$$\therefore m = 9 \text{ y } n = 112$$

Rpta.: A

PROBLEMA 39 La potencia dada es:

$$(x^5 + y^p)^n$$

Según la teoría $\overset{\rightarrow}{t_{k+1}}$ y $\overset{\leftarrow}{t_{k+1}}$ son equidistantes.

Por fórmula tenemos:

$$I. \overset{\rightarrow}{t_{k+1}} = C_k^n (x^5)^{n-k} (y^p)^k$$

$$\overset{\rightarrow}{t_{k+1}} = C_k^n x^{5(n-k)} y^{kp}$$

$$II. \overset{\leftarrow}{t_{k+1}} = C_k^n (y^p)^{n-k} (x^5)^k$$

$$t_{k+1}^{\leftarrow} = C_k^n x^{5k} y^{p(n-k)}$$

III. Igualando con los datos

$$C_k^n x^{5(n-k)} y^{kp} = q x^{q+2} y^4$$

$$\Rightarrow 5(n-k) = q+2 \wedge kp = 4 \dots\dots (1)$$

$$C_k^n x^{5k} y^{p(n-k)} = 4r x^{10} y^{r+5}$$

$$\Rightarrow 5k = 10 \wedge p(n-k) = r+5 \dots\dots (2)$$

$$\text{De (1) y (2): } k = 2 \wedge p = 2$$

Observa que $C_k^n = q = 4r$, nuevamente con (1) y (2) tenemos:

$$\left. \begin{array}{l} 5(n-k) = q+2 \\ 2(n-k) = r+5 \end{array} \right\} \text{ Al dividir:}$$

$$\frac{5}{2} = \frac{4r+2}{r+5}$$

$$5r + 25 = 8r + 4$$

$$21 = 3r$$

$$7 = r$$

$$\text{Como } q = 4r \Rightarrow q = 28$$

Así mismo $5(n-k) = q+2$, es decir:

$$5(n-2) = 30$$

$$n-2 = 6$$

$$n = 8$$

Finalmente la suma de los coeficientes en el desarrollo de:

$$(x^5 + y^p)^n = (x^5 + y^2)^8 \text{ es:}$$

$$S = (1+1)^8 = 2^8$$

$$\therefore S = 256$$

Rpta.: B

PROBLEMA 40 La potencia dada es:

$$\left(\frac{x^p}{y^{n-10}} + \frac{y^{n+20}}{x} \right)^n$$

Fácilmente podemos reconocer que el término central ocupa el lugar $\frac{n}{2} + 1$ luego por fórmula.

$$t_{\frac{n}{2}+1} = C_{\frac{n}{2}}^n \left(\frac{x^p}{y^{n-10}} \right)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{y^{n+20}}{x} \right)^{\frac{n}{2}}$$

$$t_{\frac{n}{2}+1} = C_{\frac{n}{2}}^n x^{\frac{n}{2}(p-1)} y^{15n}$$

Por condición tenemos:

$$15n = 600 \Rightarrow n = 40$$

También por condición:

$$\frac{n}{2}(p-1) = 60$$

$$20(p-1) = 60$$

$$p-1 = 3$$

$$p = 4$$

$$\therefore n + p = 44$$

Rpta.: B

PROBLEMA 41 La potencia dada es:

$$(3 + 2x)^{15}$$

De acuerdo con la teoría se plantea:

$$t_{k+1} > t_k$$

Si la potencia fuese $(a + b)^n$, la relación anterior se puede reescribir así:

$$\frac{n-k+1}{k} > \frac{a}{b}$$

Reemplazando datos:

$$\frac{15-k+1}{k} > \frac{3}{2x}$$

Haciendo $x = \frac{7}{2}$ tenemos :

$$\frac{16-k}{k} > \frac{3}{7}$$

$$112 - 7k > 3k$$

$$-10k > -112$$

$$k < 11,2$$

Aquí reconocemos que el mayor valor de "k" es 11

$$\therefore \text{Lugar} = k + 1 = 12$$

Rpta.: B

PROBLEMA 42 Sea "S" la suma, luego tenemos:

$$S = C_0^n + 2^2 C_1^n + 2^4 C_2^n + 2^6 C_3^n + \dots + (n+1) \text{ términos}$$

$$S = C_0^n + 4 C_1^n + 4^2 C_2^n + 4^3 C_3^n + \dots + 4^n C_n^n$$

(n + 1) términos

Por teorema tenemos:

$$S = (1 + 4)^n$$

$$\therefore S = 5^n$$

Rpta.: A

PROBLEMA 43 Sea "S" la suma, luego tenemos:

$$S = \frac{5 C_0^n}{1} + \frac{5^2 C_1^n}{2} + \frac{5^3 C_2^n}{3} + \dots + \frac{5^{n+1} C_n^n}{n+1}$$

Multiplicando a ambos miembros por n + 1

$$(n+1)S = 5 \left(\frac{n+1}{1} \right) C_0^n + 5^2 \left(\frac{n+1}{2} \right) C_1^n + 5^3 \left(\frac{n+1}{3} \right) C_2^n + \dots + 5^{n+1} \left(\frac{n+1}{n+1} \right) C_n^n$$

Dando uso del teorema para degradación:

$$(n+1)S = 5C_1^{n+1} + 5^2C_2^{n+1} + 5^3C_3^{n+1} + \dots + 5^{n+1}C_{n+1}^{n+1}$$

Sumando a ambos miembros C_0^{n+1} tenemos:

$$(n+1)S + C_0^{n+1} = C_0^{n+1} + 5C_1^{n+1} + 5^2C_2^{n+1} + 5^3C_3^{n+1} + \dots + 5^{n+1}C_{n+1}^{n+1}$$

Por teorema:

$$(n+1)S + C_0^{n+1} = (1+5)^{n+1}$$

$$(n+1)S + 1 = 6^{n+1}$$

$$(n+1)S = 6^{n+1} - 1$$

$$\therefore S = \frac{6^{n+1} - 1}{n+1}$$

Rpta.: B

PROBLEMA 44 La expresión dada es:

$$A = 3\left(1 + \frac{x}{9}\right)^{\frac{1}{2}}(1+x)^{-1}$$

Por aproximación lineal.

$$A = 3\left(1 + \frac{x}{18}\right)(1-x)$$

$$A = 3\left(1 - x + \frac{x}{18} - \frac{x^2}{18}\right)$$

Por condición x^2 se desprecia, luego:

$$A = 3\left(1 - x + \frac{x}{18}\right)$$

$$A = 3\left(1 - \frac{17x}{18}\right)$$

$$\therefore A = 3 - \frac{17x}{6}$$

Rpta.: C

PROBLEMA 45 De acuerdo con la fórmula de Leibniz se plantea:

$$(x + y + z + w)^8 = \sum \binom{8}{\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3; \alpha_4} x^{\alpha_1} y^{\alpha_2} z^{\alpha_3} w^{\alpha_4}$$

Por condición:

$$\alpha_1 = 3 \wedge \alpha_2 = 2 \wedge \alpha_3 = 1 \wedge \alpha_4 = 2$$

Por propiedad:

$$n = C_3^{8+3}$$

$$n = C_3^{11}$$

$$n = 165$$

Además tenemos que:

$$m = \binom{8}{\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3; \alpha_4}$$

$$m = \binom{8}{3; 2; 1; 2} = \frac{8!}{3! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 2!}$$

$$m = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2}$$

$$m = 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 1680$$

$$\therefore m + n = 1845$$

Rpta.: E

PROBLEMA 46 De acuerdo con la fórmula de Leibniz se plantea:

$$(\sqrt{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[4]{z})^n = \sum \binom{n}{\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3} \sqrt{x}^{\alpha_1} \sqrt[3]{y}^{\alpha_2} \sqrt[4]{z}^{\alpha_3}$$

Por condición: $\alpha_1 = 2 \wedge \alpha_2 = 3 \wedge \alpha_3 = 4$

Según la teoría: $n = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$

$$\therefore n = 9$$

Rpta.: A

PROBLEMA 47 De acuerdo con la fórmula de Leibniz se plantea:

$$(x^2 + y - x)^8 = \sum \binom{8}{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3} x^{2\alpha_1} y^{\alpha_2} (-x)^{\alpha_3}$$

$$(x^2 + y - x)^8 = \sum \binom{8}{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3} (-1)^{\alpha_3} x^{2\alpha_1 + \alpha_3} y^{\alpha_2}$$

Por condición $k = \alpha_2$ es un número par no nulo.

$$\begin{array}{ccc} 2\alpha_1 + \alpha_3 = 10 & \wedge & \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 8 \\ \downarrow \quad \downarrow & & \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ 4 \quad 2 & & 4 \quad 2 \quad 2 \end{array}$$

Finalmente tenemos:

$$\text{Coef} = \binom{8}{4;2;2} \cdot (-1)^2$$

$$\text{Coef} = \frac{8!}{4!.2!.2!} \cdot 1$$

$$\text{Coef} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{2 \cdot 2} = 2 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$$

$$\therefore \text{Coef} = 420$$

Rpta.: C

PROBLEMA 48 La potencia es $(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_m)^n$, según las condiciones.

I. $C_{m-1}^{n+m-1} = 15$

II. $\underbrace{(1 + 1 + \dots + 1)}_{m \text{ veces}}^n = 5^n$

Observa que $m^n = 5^n$, de donde $m = 5$

Ahora en (I) tenemos:

$$C_4^{n+4} = 15$$

$$\frac{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)}{1.2.3.4} = 15$$

$$(n+4)(n+3)(n+2)(n+1) = 1.2.3.4.5.3$$

$$(n+4)(n+3)(n+2)(n+1) = 6.5.4.3$$

Aquí reconocemos que:

$$n+4 = 6$$

$$\therefore n = 2$$

Rpta.: D

PROBLEMA 49 De acuerdo con la fórmula de Leibniz se plantea:

$$(x - 3x^2 + 2x^3 + x^4)^{10} = \sum \binom{10}{\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3; \alpha_4} \cdot x^{\alpha_1} (-3x^2)^{\alpha_2} (2x^3)^{\alpha_3} (x^4)^{\alpha_4}$$

Observa que el coeficiente buscado es:

$$C = \sum \binom{10}{\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3; \alpha_4} \cdot (-3)^{\alpha_2} (2)^{\alpha_3} \dots \dots \dots (1)$$

También observa que la parte literal es:

$$X^{\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4}$$

Por condición y propiedad se plantea:

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 & = & 12 & \wedge & \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 & = & 10 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 9 & 0 & 1 & 0 & 9 & 0 & 1 & 0 \\ 8 & 2 & 0 & 0 & 8 & 2 & 0 & 0 \end{array}$$

Primer coeficiente

$$\binom{10}{9; 0; 1; 0} (-3)^0 (2)^1 = 20$$

$$\binom{10}{8; 2; 0; 0} (-3)^2 (2)^0 = 405$$

Finalmente en (1) se tendrá:

$$C = 20 + 405$$

$$\therefore C = 425$$

Rpta.: E

PROBLEMA 50 La ecuación propuesta es:

$$n! + 5 - 22 \left(\frac{n! + 1}{n! - 5} \right) = \frac{1}{n! - 5}$$

Supongamos que $n! = x$, luego tenemos:

$$x + 5 - 22 \left(\frac{x + 1}{x - 5} \right) = \frac{1}{x - 5}$$

$$x + 5 = \frac{1}{x - 5} + \frac{22x + 22}{x - 5}$$

$$x + 5 = \frac{22x + 23}{x - 5}$$

$$(x + 5)(x - 5) = 22x + 23$$

$$x^2 - 25 = 22x + 23$$

$$x^2 - 22x - 48 = 0$$

$$(x - 24)(x + 2) = 0$$

$$x - 24 = 0 \vee x + 2 = 0$$

$$x = 24 \vee x = -2$$

Por existencia del factorial, solo aceptamos $x = 24$. Reponiendo la incógnita original.

$$x = 24$$

$$n! = 24$$

$$n! = 4!$$

$$\therefore n = 4$$

Rpta.: D

PROBLEMA 51 La ecuación propuesta se puede reescribir así:

$$9 \cdot \boxed{8} x^2 + (63 + \boxed{8} \boxed{6})x + 7\boxed{6} = 0$$

$$\begin{array}{ccc} 9x & \nearrow & \boxed{6} \\ & \uparrow & \\ \boxed{8}x & \searrow & 7 \end{array}$$

$$(9x + \boxed{6})(\boxed{8}x + 7) = 0$$

$$9x + \boxed{6} = 0 \vee \boxed{8}x + 7 = 0$$

$$x = -\frac{\boxed{6}}{9} \vee x = -\frac{7}{\boxed{8}}$$

$$\therefore \left\{ -\frac{\boxed{6}}{9}; -\frac{7}{\boxed{8}} \right\}$$

Rpta.: A

PROBLEMA 52 La igualdad mostrada se puede reescribir así:

$$1 \cdot C_8^m + 4 \cdot C_9^m + 6 \cdot C_{10}^m + 4 \cdot C_{11}^m + 1 \cdot C_{12}^m = C_{27}^n$$

$$C_4^4 \cdot C_8^m + C_3^4 \cdot C_9^m + C_2^4 \cdot C_{10}^m + C_1^4 \cdot C_{11}^m + C_0^4 \cdot C_{12}^m = C_{27}^n$$

Por propiedad: C_{12}^{m+4}

Ahora tenemos:

$$C_{12}^{m+4} = C_{27}^n$$

Aquí se cumple que:

$$m + 4 = n \wedge 12 + 27 = n$$

$$m + 4 = n \wedge 39 = n$$

$$m + 4 = 39 \wedge n = 39$$

$$m = 35 \wedge n = 39$$

$$\therefore m + n = 74$$

Rpta.: C

PROBLEMA 53 La potencia dada es:

$$P(x) \equiv (x^2 - x^{-1})^9$$

Hallems el término general:

$$t_{k+1} = C_k^9 (x^2)^{9-k} (-x^{-1})^k$$

$$t_{k+1} = (-1)^k C_k^9 x^{18-2k} x^{-k}$$

$$t_{k+1} = (-1)^k C_k^9 x^{18-3k} \dots\dots\dots (1)$$

Por condición t_{k+1} debe ser independiente de x , luego se cumple que :

$$18-3k = 0 \Rightarrow k=6$$

Finalmente en (1) tenemos:

$$t_7 = (-1)^6 \cdot C_6^9 = 1 \cdot C_3^9$$

$$t_7 = C_3^9 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$\therefore t_7 = 84$$

Rpta.: E

PROBLEMA 54 La potencia dada es:

$$\left(\sqrt[3]{2} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \right)^x$$

Hallems el séptimo término contado de izquierda a derecha:

$$\vec{t}_7 = C_6^x (\sqrt[3]{2})^{x-6} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}} \right)^6$$

Hallems el séptimo término contado de derecha a izquierda

$$\leftarrow t_7 = C_6^x \left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}} \right)^{x-6} (\sqrt[3]{2})^6$$

Por condición se plantea:

$$\frac{\overset{\rightarrow}{t_7}}{\underset{\leftarrow}{t_7}} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{C_6^x (\sqrt[3]{2})^{x-6} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^6}{C_6^x (\sqrt[3]{2})^6 \left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^{x-6}} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{\sqrt[3]{2}^{x-12}}{\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^{x-12}} = \frac{1}{6}$$

$$\left[\frac{\sqrt[3]{2}}{\frac{1}{\sqrt[3]{3}}} \right]^{x-12} = \frac{1}{6}$$

$$\sqrt[3]{6}^{x-12} = 6^{-1}$$

$$6^{\frac{x-12}{3}} = 6^{-1}$$

$$\frac{x-12}{3} = -1$$

$$x - 12 = -3$$

$$\therefore x = 9$$

Rpta.: D

PROBLEMA 55 De acuerdo con la teoría el término central ocupa el lugar $\frac{n}{2} + 1$

Por fórmula y condición:

$$t_{\frac{n}{2}+1}^n = C_{\frac{n}{2}}^n X^{\frac{n}{2}} = 6X^{\frac{n^2-9n+24}{2}}$$

Fácilmente reconocemos que:

$$\begin{aligned}n^2 - 9n + 24 &= 0 \\n^2 - 10n + 24 &= 0 \\(n-4)(n-6) &= 0 \\n &= 4 \vee n = 6 \dots\dots\dots (1)\end{aligned}$$

También se debe cumplir que:

$$C_n^2 = 6 \dots\dots\dots (2)$$

De (1) y (2) aceptamos $n = 4$

$$\therefore n = 4$$

Rpta.: B

PROBLEMA 56

Por fórmula tenemos:

$$t_{k+1} = C_k^{12} \sqrt[3]{3}^{12-k} \sqrt{2}^k$$

Observa que si t_{k+1} es natural, "k" debe ser un múltiplo de seis.

Según la teoría se cumple que: $0 \leq k \leq 12$

Aquí reconocemos que $k = 0; 6$ y 12

Nótese que con cada valor de "k" se obtiene un número natural.

$\therefore$ El desarrollo tiene 3 números naturales

Rpta.: C

PROBLEMA 57

De acuerdo con la teoría la ecuación propuesta se puede reescribir así:

$$\frac{x(x-1)}{2} + \frac{(x-1)(x-2)}{2} + \frac{(x-2)(x-3)}{2} = 136$$

$$\frac{x^2 - x + x^2 - 3x + 2 + x^2 - 5x + 6}{2} = 136$$

$$3x^2 - 9x + 8 = 272$$

$$3x^2 - 9x - 264 = 0$$

$$\begin{aligned}
 x^2 - 3x - 88 &= 0 \\
 (x-11)(x+8) &= 0 \\
 x=11 \vee x &= -8
 \end{aligned}$$

Como "x" es índice de un combinatorio, debe ser un número natural, aceptamos $x=11$

$$\therefore CS = \{11\}$$

Rpta.: E

PROBLEMA 58 Según la teoría en (1) se cumple:

$$\begin{aligned}
 x &= y + 1 + y - 1 \\
 x &= 2y \dots\dots\dots (1)
 \end{aligned}$$

En el primer miembro de (2) degradamos sucesivamente al índice inferior.

$$C_y^x = \frac{21}{10} C_{y-2}^x \lim_{x \rightarrow \infty}$$

$$\left(\frac{x-y+1}{y} \right) C_{y-1}^x = \frac{21}{10} C_{y-2}^x$$

$$\left(\frac{x-y+1}{y} \right) \left(\frac{x-y+2}{y-1} \right) C_{y-2}^x = \frac{21}{10} C_{y-2}^x$$

$$\frac{(x-y+1)(x-y+2)}{y(y-1)} = \frac{21}{10} \dots\dots\dots (2)$$

Reemplazando (1) en (2):

$$\frac{(y+1)(y+2)}{y(y-1)} = \frac{21}{10}$$

$$10(y^2 + 3y + 2) = 21(y^2 - y)$$

$$10y^2 + 30y + 20 = 21y^2 - 21y$$

$$11y^2 - 51y - 20 = 0$$

$$(11y + 4)(y - 5) = 0$$

$$11y + 4 = 0 \quad y \quad y - 5 = 0$$

$$y = -\frac{4}{11} \vee y = 5$$

Aquí aceptamos $y = 5$, luego en (1) tenemos $x = 10$

$$\therefore x + y = 15$$

Rpta.: D

PROBLEMA 59 Una rápida inspección permite reconocer que $x \in \mathbb{N}$, $x \geq 4$

La ecuación propuesta se puede reescribir así:

$$2C_4^x = 2C_3^x - C_2^x$$

$$\frac{2x(x-1)(x-2)(x-3)}{24} = \frac{2x(x-1)(x-2)}{6} - \frac{x(x-1)}{2}$$

Simplificando tenemos:

$$\frac{(x-2)(x-3)}{12} = \frac{x-2}{3} - \frac{1}{2}$$

$$x^2 - 5x + 6 = 2(2x - 7)$$

$$x^2 - 5x + 6 = 4x - 14$$

$$x^2 - 9x + 20 = 0$$

$$(x-4)(x-5) = 0$$

$$x-4 = 0 \vee (x-5) = 0$$

$$x = 4 \vee x = 5$$

$$\therefore CS = \{4; 5\}$$

Rpta.: B

PROBLEMA 60 De acuerdo con la teoría el primer miembro de la ecuación se puede reescribir así:

$$1 + x + \frac{x(x-1)}{2} + \frac{x(x-1)(x-2)}{6} = \frac{x^3 + 6x}{6}$$

$$6 + 6x + 3x(x-1) + x(x-1)(x-2) = x^3 + 6x$$

$$6 + 6x + 3x^2 - 3x + x^3 - 3x^2 + 2x = x^3 + 6x$$

$$x^3 + 5x + 6 = x^3 + 6x$$

$$6 = x$$

$$\therefore CS = \{6\}$$

Rpta.: A

PROBLEMA 61

Observa que $(2x^2 - 3)$ es un binomio ordenado en forma decreciente, luego la potencia $(2x^2 - 3)^5$ también tendrá orden decreciente.

$$\text{Término independiente} = (-3)^5$$

$$\text{Término independiente} = -243$$

Rpta.: C

PROBLEMA 62 La ecuación propuesta se puede reescribir así:

$$2 \cdot n \cdot (n-1)! - (n-1) \cdot (n-1)! = 6 \cdot 5! + 5!$$

$$[2n - (n-1)] \cdot (n-1)! = 7 \cdot 5!$$

$$(n+1) \cdot (n-1)!$$

Aquí reconocemos que:

$$n+1 = 7$$

$$n = 6$$

$$\therefore n^2 + 1 = 37$$

Rpta.: E

PROBLEMA 63 Sea "D" el denominador del primer miembro.

$$D = \underline{x+1} + \underline{x+2} + \underline{x+3}$$

$$D = \underline{x+1} + (x+2)\underline{x+1} + (x+3)(x+2)\underline{x+1}$$

$$D = \underline{x+1} \cdot [1 + (x+2) + (x+3)(x+2)]$$

$$D = \underline{x+1} \cdot [(x+3) + (x+3)(x+2)]$$

$$D = \underline{x+1} \cdot (x+3) \cdot [1 + (x+2)]$$

$$D = \underline{x+1} \cdot (x+3)(x+3)$$

$$D = \underline{x+1} \cdot (x+3)^2$$

Ahora la ecuación propuesta se puede reescribir así

$$\frac{(x+3)^3 \cdot \underline{x+1}}{\underline{x+1} \cdot (x+3)^2} = 7$$

$$x+3 = 7$$

$$x = 4$$

$$\therefore CS = \{4\}$$

Rpta.: E

PROBLEMA 64 De acuerdo con la teoría se cumple que:

$$\left. \begin{array}{l} \text{I. } x+1 = y+5 \Rightarrow x = y+4 \\ \text{II. } y = 4 \end{array} \right\} x = 8$$

Finalmente tenemos:

$$x+y = 8+4$$

$$\therefore x+y = 12$$

Rpta.: E

PROBLEMA 65 Por fórmula tenemos:

$$t_{k+1} = C_k^6 \left(\frac{x}{3}\right)^{6-k} \cdot \left(-\frac{3}{x}\right)^k$$

$$t_{k+1} = (-3)^k \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{6-k} \cdot C_k^6 \cdot x^{6-k} \cdot x^{-k}$$

$$t_{k+1} = (-3)^k \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{6-k} \cdot C_k^6 \cdot x^{6-2k}$$

Por condición se cumple que:

$$6-2k = 0 \Rightarrow k = 3$$

Ahora el término independiente será:

$$t_4 = (-3)^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot C_3^6$$

$$t_4 = -27 \cdot \frac{1}{27} \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$t_4 = -\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6} = -5 \cdot 4$$

$$\therefore t_4 = -20$$

Rpta.: C**PROBLEMA 66** Sea la expresión:

$$P(a; b) = (a+b)^{2n} \cdot (a-b)^{2n} \cdot (a^4 + a^2b^2 + b^4)^{2n}$$

$$P(a; b) = [(a+b)(a-b)]^{2n} \cdot (a^4 + a^2b^2 + b^4)^{2n}$$

$$P(a; b) = (a^2 - b^2)^{2n} \cdot (a^4 + a^2b^2 + b^4)^{2n}$$

$$P(a; b) = [(a^2 - b^2)(a^4 + a^2b^2 + b^4)]^{2n}$$

$$P(a; b) = [(a^2)^3 - (b^2)^3]^{2n} = (a^6 - b^6)^{2n}$$

Por condición tenemos:

$$\begin{aligned} 2n + 1 &= 17 \\ 2n &= 16 \\ n &= 8 \end{aligned}$$

Ahora la potencia dada será:: $P(a; b) = (a^6 - b^6)^{16}$

De acuerdo con la teoría, el término central ocupa el lugar 9.

Por fórmula tenemos:

$$t_9 = C_8^{16} (a^6)^8 \cdot (-b^6)^8$$

$$t_9 = C_8^{16} a^{48} b^{48}$$

$$\therefore t_9 = C_8^{16} (ab)^{48}$$

Rpta.: C

PROBLEMA 67

Por condición :

$$\sum \text{de coef en } (x + y)^n = \sum_{k=1}^n (2k - 1)$$

Según la teoría tenemos: $2^n = n^2$

Aquí reconocemos que $n = 2 \vee n = 4$, como se pide el mayor coeficiente en el desarrollo de:

$$P(x; y) = (x + y)^n \quad \text{consideramos } n = 4$$

$$P(x; y) = (x + y)^4$$

$$P(x; y) = x^4 + 4x^3 + 6x^2y + 4xy^3 + y^4$$

$$\therefore \text{Mayor coeficiente} = 6$$

Rpta.: D

PROBLEMA 68 Por fórmula tenemos:

$$t_4 = C_3^n x^{n-3} 3^3$$

$$t_4 = 27 C_3^n x^{n-3}$$

Por condición tenemos:

$$27 C_3^n = 270$$

$$C_3^n = 10$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{6} = 10$$

$$n(n-1)(n-2) = 60$$

$$n(n-1)(n-2) = 5 \cdot 4 \cdot 3$$

Aquí reconocemos que $n = 5$, luego la potencia será:

$$P(x) = (x+3)^5$$

Por fórmula tenemos:

$$t_3 = C_2^5 x^3 3^2 = 10 \cdot x^3 \cdot 9$$

$$\therefore t_3 = 90x^3$$

Rpta.: A**PROBLEMA 69**

De acuerdo con la teoría si t_p y t_q son términos equidistantes en el desarrollo de $(a+b)^n$ se cumple que:

$$p+q = n+2$$

En nuestro caso se cumple que:

$$k^2 + 8 + 6k = 193 + 2$$

$$k^2 + 6k - 187 = 0$$

$$(k+17)(k-11) = 0$$

$$k = -17 \vee k = 11$$

$$\therefore k = 11$$

Rpta.: E

PROBLEMA 70 Por fórmula tenemos:

$$t_{k+1} = C_k^{78} x^{78-k} (x^{-2})^k$$

$$t_{k+1} = C_k^{78} x^{78-3k} \dots\dots\dots (1)$$

Por condición se cumple que.

$$78 - 3k = 45$$

$$33 = 3k$$

$$11 = k$$

Finalmente hallemos el coeficiente de

$$x^{45-8} = x^{36}$$

En (1) hacemos :

$$78 - 3k = 36$$

$$k = 14$$

$$\therefore \text{Coeficiente} = C_{14}^{78}$$

Rpta.: E

PROBLEMA 71

Para cada potencia tenemos:

$$\Sigma \text{ de coef en } (a+b)^m = 2^m$$

$$\Sigma \text{ de coef en } (c+d)^n = 2^n$$

$$\Sigma \text{ de coef en } (e+f)^p = 2^p$$

Por condición se plantea que:

$$2^m \cdot 2^n \cdot 2^p = 4096$$

$$2^{m+n+p} = 2^{12}$$

$$m+n+p = 12$$

$$m+n+p = 2+4+6$$

Aquí reconocemos que:

$$\{m, n, p\} = \{2; 4; 6\}$$

De donde $m + n + p = 12 \wedge mnp = 48$
luego en la expresión "k" se tendrá:

$$k = \frac{12-12}{48} = \frac{0}{48}$$

$$\therefore k = 0$$

Rpta.: D

PROBLEMA 72 Por fórmula tenemos:

$$t_7 = C_6^n (x^2y)^{n-6} (z)^6$$

$$t_7 = C_6^n x^{2n-12} y^{n-6} z^6$$

Por condición se plantea:

$$2n - 12 + n - 6 + 6 = 30$$

$$3n - 12 = 30$$

$$3n = 42$$

$$n = 14$$

Ahora la potencia será $P(x; y; z) = (x^2y + z)^{14}$
y su término central ocupan el lugar 8.

$$t_8 = C_7^{14} (x^2y)^7 z^7$$

$$t_8 = C_7^{14} x^{14} y^7 z^7$$

Finalmente tenemos:

$$[t_8]^{\circ} = 14 + 7 + 7$$

$$\therefore [t_8]^{\circ} = 28$$

Rpta.: A

PROBLEMA 73 La igualdad propuesta es:

$$C_{x^2}^{24} = C_{2x}^{24}$$

Según la teoría se cumple que:

$$x^2 = 2x \vee x^2 + 2x = 24 ; x \in \mathbb{N}$$

$$x^2 - 2x = 0 \vee x^2 + 2x - 24 = 0 ; x \in \mathbb{N}$$

$$x(x-2) = 0 \vee (x+6)(x-4) = 0 ; x \in \mathbb{N}$$

$$x = 0 \vee x = 2 \vee x = -6 \vee x = 4$$

$$\text{como } x \in \mathbb{N}: x = 0; x = 2; x = 4$$

$$\therefore CS = \{0; 2; 4\}$$

Rpta.: B

PROBLEMA 74 Hallemos el quinto término según fórmula:

$$t_5 = C_4^n x^{n-4} (2y)^4$$

$$t_5 = 16C_4^n x^{n-4} y^4$$

Por condición se cumple que:

$$m = n \wedge 2m = 16$$

$$m = n \wedge m = 8$$

Hallemos el sexto término, según fórmula:

$$t_6 = C_5^n x^{n-5} (2y)^5$$

$$t_6 = C_5^8 x^3 (2y)^5$$

$$t_6 = 32C_5^8 x^3 y^5$$

$$t_6 = 32C_3^8 x^3 y^5$$

$$t_6 = 32 \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 y^5$$

$$t_6 = 32 \cdot 8 \cdot 7 x^3 y^5$$

$$t_6 = 1792 x^3 y^5$$

$$\therefore \text{Coeficiente} = 1792$$

Rpta.: B

PROBLEMA 75

La potencia dada es $(1+x)^{40}$, según fórmula tenemos:

$$t_{2r+1} = C_{2r}^{40} x^{2r} \Rightarrow \text{coef} = C_{2r}^{40}$$

$$t_{r+2} = C_{r+1}^{40} x^{r+1} \Rightarrow \text{coef} = C_{r+1}^{40}$$

Por condición se cumple:

$$C_{2r}^{40} = C_{r+1}^{40}$$

$$2r = r+1 \vee 2r+r+1 = 40$$

$$r = 1 \vee 3r = 39$$

$$r = 1 \vee r = 13$$

$$\therefore r = 13$$

Rpta.: A

PROBLEMA 76 Por fórmula tenemos:

$$t_{k+1} = C_k^{22} (2x^2)^{22-k} \cdot \left(\frac{3}{x}\right)^k$$

$$t_{k+1} = C_k^{22} \cdot 2^{22-k} \cdot x^{44-2k} \cdot \frac{3^k}{x^k}$$

$$t_{k+1} = 2^{22-k} \cdot 3^k \cdot C_k^{22} \cdot x^{44-3k}$$

Por condición se cumple que:

$$29 = 44 - 3k$$

$$3k = 15$$

$$k = 5$$

$$\therefore \text{Lugar} = 6$$

Rpta.: D

PROBLEMA 77 La expresión dada es:

$$P(x) = [(\sqrt{x} - 1)^9 \cdot (\sqrt{x} + 1)^9 \cdot (x^2 + x + 1)^9]^4$$

$$P(x) = \left[\left\{ (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)(x^2 + x + 1) \right\}^9 \right]^4$$

$$P(x) = \left[(\sqrt{x}^2 - 1^2)(x^2 + x + 1) \right]^{36}$$

$$P(x) = \left[(x - 1)(x^2 + x + 1) \right]^{36}$$

$$P(x) = (x^3 - 1)^{36}$$

$$\therefore \text{N}^\circ \text{ de términos} = 37$$

Rpta.: E

PROBLEMA 78 Por fórmula tenemos:

$$t_{k+1} = C_k^{14} \cdot x^{14-k} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{x}} \right)^k$$

$$t_{k+1} = C_k^{14} \cdot x^{14-k} \cdot \left(-\sqrt{x}^{-1} \right)^k$$

$$t_{k+1} = C_k^{14} \cdot x^{14-k} \cdot (-1)^k \cdot x^{-\frac{k}{2}}$$

$$t_{k+1} = (-1)^k C_k^{14} x^{14-k} \frac{k}{2}$$

Por condición se cumple que:

$$2 = 14 - k - \frac{k}{2}$$

$$k + \frac{k}{2} = 12$$

$$\frac{3k}{2} = 12 \Rightarrow k = 8$$

$$\therefore \text{lugar} = 9$$

Rpta.: A

PROBLEMA 79 Según la teoría el lugar del término central será $\frac{n}{2} + 1$

Por fórmula tenemos:

$$t_{\frac{n}{2}+1} = C_{\frac{n}{2}}^n (x^3)^{\frac{n}{2}} \cdot \left(\frac{y^2}{x}\right)^{\frac{n}{2}}$$

$$t_{\frac{n}{2}+1} = C_{\frac{n}{2}}^n x^{\frac{3n}{2}} \cdot \frac{y^n}{x^{\frac{n}{2}}}$$

$$t_{\frac{n}{2}+1} = C_{\frac{n}{2}}^n x^n \cdot y^n$$

Por condición se cumple que:

$$n + n = 8$$

$$2n = 8$$

$$n = 4$$

Finalmente tenemos:

$$\text{Coef} = C_{\frac{n}{2}}^n = C_2^4 = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2}$$

$$\therefore \text{Coef} = 6$$

Rpta.: B

PROBLEMA 80 Expresando cada factorial en función del menor de ellos tenemos:

$$(n-1)! + n \cdot (n-1)! = \frac{2}{10} (n+1)(n)(n-1)!$$

$$(1+n) \cdot (n-1)! = \frac{1}{5} (n+1) \cdot (n) \cdot (n-1)!$$

Simplificando: $1+n = \frac{(n+1)(n)}{5}$

Simplificando: $5 = n$
 $\therefore CS = \{5\}$

Rpta.: D

PROBLEMA 81 Reduciendo en cada término de la fracción del primer miembro:

$$\frac{x! + (x+1)x! + (x+2)(x+1)x!}{(x+3)(x+2)! - (x+2)!} = \frac{1}{2012}$$

$$\frac{x! [1 + (x+1) + (x+2)(x+1)]}{(x+2)! [(x+3) - 1]} = \frac{1}{2012}$$

$$\frac{x! [(x+2) + (x+2)(x+1)]}{(x+2)(x+1)x!(x+2)} = \frac{1}{2012}$$

$$\frac{(x+2)[1 + (x+1)]}{(x+2)(x+1)(x+2)} = \frac{1}{2012}$$

$$\frac{x+2}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{2012}$$

$$\frac{1}{x+1} = \frac{1}{2012}$$

$$x+1 = 2012$$

$$\therefore x = 2011$$

Rpta.: B

PROBLEMA 82 Supongamos que "k" es la forma reducida de la expresión, luego:

$$K = 1 \cdot 2^{10} + 10 \cdot 2^9 + 45 \cdot 2^8 + 120 \cdot 2^7 + \dots + 10 \cdot 2 + 1$$

$$K = C_0^{10} \cdot 2^{10} + C_1^{10} \cdot 2^9 + C_2^{10} \cdot 2^8 + C_3^{10} \cdot 2^7 + \dots + C_9^{10} \cdot 2 + C_{10}^{10}$$

Por teorema:

$$K = (2 + 1)^{10} = 3^{10} = 59049$$

$$\therefore \sum \text{de cifras} = 27$$

Rpta.: C

PROBLEMA 83 Sea "S" la forma reducida de la expresión dada, luego

$$S = \frac{C_0^n}{1 \cdot 2} + \frac{C_1^n}{2 \cdot 3} + \frac{C_2^n}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{C_n^n}{(n+1)(n+2)}$$

Inicialmente multiplicamos a ambos miembros por (n+1).

$$(n+1)S = \frac{(n+1)C_0^n}{1 \cdot 2} + \frac{(n+1)C_1^n}{2 \cdot 3} + \frac{(n+1)C_2^n}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{(n+1)C_n^n}{(n+1)(n+2)}$$

Dando uso del teorema $\frac{n}{k} C_{k-1}^{n-1} = C_k^n$ en el segundo miembro se tendrá:

$$(n+1)S = \frac{C_1^{n+1}}{2} + \frac{C_2^{n+1}}{3} + \frac{C_3^{n+1}}{4} + \dots + \frac{C_{n+1}^{n+1}}{n+2}$$

Ahora multiplicamos a ambos miembros por (n+2) y procedemos de un modo similar que antes.

$$(n+2)(n+1)S = \frac{(n+2)C_1^{n+1}}{2} + \frac{(n+2)C_2^{n+1}}{3} + \dots + \frac{(n+2)C_{n+1}^{n+1}}{n+2}$$

$$(n+2)(n+1)S = C_2^{n+2} + C_3^{n+2} + C_4^{n+2} + \dots + C_{n+2}^{n+2}$$

Por teorema

$$(n+2)(n+1)S = 2^{n+2} - C_1^{n+2} - C_0^{n+2}$$

$$(n+2)(n+1)S = 2^{n+2} - n - 2 - 1$$

$$\therefore S = \frac{2^{n+2} - n - 3}{(n+2)(n+1)}$$

Rpta.: D

PROBLEMA 84

Nótese que la suma de los grados de los términos del desarrollo es igual que sumar todos los exponentes de las variables en el desarrollo

Por propiedad tenemos:

$$\frac{(3+2)(2n)(2n+1)}{2} = 275$$

$$5(n)(2n+1) = 275$$

$$(n)(2n+1) = 55$$

$$n \cdot (2n+1) = 5 \cdot 11$$

Fácilmente reconocemos que $n = 5$

$$\therefore (x^3 + y^2)^{10} \text{ tiene 11 términos}$$

Rpta.: B

PROBLEMA 85

Por fórmula tenemos:

$$t_{k+1} = C_k^n \left(\frac{xy}{z} \right)^{n-k} \cdot (z^4 \cdot \sqrt{z} \cdot \sqrt[4]{y})^k$$

$$t_{k+1} = C_k^n \cdot \frac{x^{n-k} y^{n-k}}{z^{n-k}} \cdot z^{4k} \cdot z^{\frac{k}{2}} \cdot y^{\frac{k}{4}}$$

$$t_{k+1} = C_k^n \cdot x^{n-k} y^{n-\frac{3k}{4}} \cdot z^{\frac{11k}{4}-n}$$

Primera condición:

$$n - \frac{3k}{4} - (n - k) = 1$$

$$n - \frac{3k}{4} - n + k = 1$$

$$\frac{k}{4} = 1 \Rightarrow k = 4$$

Segunda condición:

$$\frac{11k}{2} - n - (n - \frac{3k}{4}) = 1$$

$$\frac{11k}{2} - n - n + \frac{3k}{4} = 1$$

$$22 - 2n + 3 = 1$$

$$24 = 2n$$

$$\therefore n = 12$$

Rpta.: B**PROBLEMA 86** La expresión dada es:

$$P(x) \equiv \left(6 + \sqrt{x} + 9\sqrt{x}^{-1}\right)^4$$

$$P(x) \equiv \left(6 + \sqrt{x} + \frac{9}{\sqrt{x}}\right)^4$$

$$P(x) \equiv \left(\frac{\sqrt{x}^2 + 6\sqrt{x} + 9}{\sqrt{x}}\right)^4$$

$$P(x) \equiv \left(\frac{(\sqrt{x} + 3)^2}{\sqrt{x}}\right)^4$$

$$P(x) \equiv \frac{(\sqrt{x} + 3)^8}{x^2}$$

$$P(x) \equiv x^{-2} \cdot (\sqrt{x} + 3)^8$$

Observa que un término cualquiera en el desarrollo de $P(x)$ viene dado por:

$$t_{x+1} = x^{-2} \cdot C_k^8 \sqrt{x}^{8-k} \cdot 3^k$$

$$t_{x+1} = x^{-2} \cdot C_k^8 \cdot x^{4-\frac{k}{2}} \cdot 3^k$$

$$t_{x+1} = 3^k \cdot C_k^8 \cdot x^{2-\frac{k}{2}} \dots\dots\dots (*)$$

Si " t_{k+1} " es un término racional fraccionario,
el exponente de x deberá ser un entero negativo

Por condición se cumple que:

$$2 - \frac{k}{2} < 0 \wedge k = 2$$

$$\frac{k}{2} > 2 \wedge k = 2$$

$$k > 4 \wedge k = 2 \dots\dots\dots (1)$$

Por existencia del combinatorio:

$$0 \leq k \leq 8 \dots\dots\dots (2)$$

De (1) y (2) : $k = 6 \vee k = 8$

$$\text{En } (*) \text{ } k = 6 : t_7 = 3^6 C_6^8 x^{-1}$$

$$\text{En } (*) \text{ } k = 8 : t_9 = 3^8 C_8^8 x^{-2}$$

Finalmente al dividir:

$$\frac{t_7}{t_9} = \frac{3^6 28x^{-1}}{3^8 \cdot x^{-2}}$$

$$\therefore \frac{t_7}{t_9} = \frac{28x}{9}$$

Rpta.: B

PROBLEMA 87 Por término general tenemos:

$$t_{k+1} = \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot (1)^{\frac{1}{2}-k} \cdot (4x)^k$$

$$t_{k+1} = \binom{-\frac{1}{2}}{k} \cdot 4^k \cdot x^k$$

Por condición $k = r$; luego si "c" es el coeficiente buscado tenemos:

$$C = \binom{-\frac{1}{2}}{r} \cdot 4^r$$

$$C = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right) \dots \left(-\frac{1}{2}-r+1\right)}{r!} \cdot 4^r$$

$$C = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right) \dots \left(-\frac{2r-1}{2}\right)}{r!} \cdot 4^r$$

$$C = \frac{(-1)^r \cdot [1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2r-1)]}{r! \cdot 2^r} \cdot 4^r$$

Por propiedad: $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2r-1) = \frac{(2r)!}{2^r r!}$

Ahora tenemos: $C = \frac{(-1)^r \cdot (2r)! \cdot 4^r}{2^r \cdot r! \cdot r! \cdot 2^r} = \frac{(-1)^r \cdot (2r)! \cdot 4^r}{(r!)^2 \cdot 4^r}$

$$C = \frac{(2r)!}{(r!)^2} \cdot (-1)^r$$

Rpta.: D

PROBLEMA 88

De acuerdo con la teoría el número de términos viene dado por:

$$n^\circ \text{ términos} = C_2^{6+2} = C_2^8$$

$$n^\circ \text{ términos} = \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 4 \cdot 7$$

$$\therefore n^\circ \text{ términos} = 28$$

Rpta.: B

PROBLEMA 89 Por fórmula tenemos:

$$t_{k+1} = C_k^4 (ax^3)^{4-k} \cdot \left(\frac{2y}{x^2}\right)^k$$

$$t_{k+1} = C_k^4 a^{4-k} \cdot x^{12-3k} \cdot 2^k \cdot y^k \cdot x^{-2k}$$

$$t_{k+1} = C_k^4 a^{4-k} \cdot 2^k \cdot x^{12-5k} \cdot y^k$$

Por condición los exponentes de x y deben ser iguales, esto es:

$$12 - 5k = k$$

$$6k = 12$$

$$k = 2$$

También por condición:

$$C_k^4 \cdot a^{4-k} \cdot 2^k = 24$$

$$C_k^4 \cdot a^2 \cdot 4 = 24$$

$$6a^2 = 6$$

$$a^2 = 1$$

$$\therefore a = 1 \vee a = -1$$

Rpta.: E

PROBLEMA 90 La expresión dada es:

$$P_n = C_0^n - \left(\frac{1}{2}\right) C_1^n + \left(\frac{1}{2}\right)^2 C_2^n - \dots + (-1)^n \left(\frac{1}{2}\right)^n C_n^n$$

$$P_n = C_0^n + \left(-\frac{1}{2}\right) C_1^n + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 C_2^n + \dots + \left(-\frac{1}{2}\right)^n C_n^n$$

Por teorema:

$$p_n = \left[1 + \left(-\frac{1}{2} \right) \right]^n = \left(1 - \frac{1}{2} \right)^n = \left(\frac{1}{2} \right)^n$$

Finalmente hallemos el valor pedido:

$$\sum_{n=0}^8 p_n = \sum_{n=0}^8 \left(\frac{1}{2} \right)^n = \frac{\left(\frac{1}{2} \right)^9 - 1}{\left(\frac{1}{2} \right) - 1} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2} \right)^9}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$\sum_{n=0}^8 p_n = \frac{512 - 1}{2 - 1} = \frac{511}{1}$$

$$\therefore \sum_{n=0}^8 p_n = \frac{511}{256}$$

Rpta.: C

PROBLEMA 91

Fácilmente podemos reconocer que si a cada sumando se le divide por $3!$ estaremos frente a una adición de combinatorios

$$\frac{S}{3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3!} + \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{3!} + \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{3!} + \dots + \frac{(n-2)(n-1)n}{3!}$$

$$\frac{S}{3!} = C_3^3 + C_3^4 + C_3^5 + \dots + C_3^n$$

Nótese que $C_3^3 = 1 \wedge C_4^4 = 1$, luego

podemos reemplazar C_3^3 por C_4^4

$$\frac{S}{3!} = \underbrace{C_4^4 + C_3^4 + C_3^5 + C_3^6 + \dots + C_3^n}_{\vdots} + \underbrace{C_4^5}_{\vdots} + \underbrace{C_4^6}_{\vdots} + \underbrace{C_4^7}_{\vdots} + \dots + \underbrace{C_4^{n+1}}_{\vdots}$$

Luego de reducir:

$$\frac{S}{3!} = C_4^{n+1}$$

$$\therefore S = 3! C_4^{n+1}$$

Rpta.: A

PROBLEMA 92

Como se pide el coeficiente de x^2 , fácilmente podemos reconocer que dicho coeficiente se podrá obtener mediante sumas parciales a partir del segundo sumando dado.

Sea "C" el coeficiente buscado, luego:

$$C = \sum_{k=2}^n C_2^k = C_2^2 + C_2^3 + C_2^4 + \dots + C_2^n$$

Aquí al igual que en el problema anterior

conviene cambiar, C_2^2 por C_3^3 veamos:

Supongamos que:

$$\sum_{r=0}^n (m+r) C_r^n = E_1 + E_2 + \dots \quad (1)$$

Donde reconocemos que:

$$E_1 = m C_0^n + m C_1^n + m C_2^n + \dots + m C_n^n$$

$$E_1 = m [C_0^n + C_1^n + C_2^n + \dots + C_n^n]$$

$$E_1 = m \cdot 2^n \quad (2)$$

Asimismo también que:

$$E_2 = C_1^n + 2 C_2^n + 3 C_3^n + \dots + n C_n^n$$

$$E_2 = \frac{n}{1} C_0^{n-1} + 2 \cdot \frac{n}{2} C_1^{n-1} + 3 \cdot \frac{n}{3} C_2^{n-1} + \dots + n \cdot \frac{n}{n} C_{n-1}^{n-1}$$

$$E_2 = n C_0^{n-1} + n C_1^{n-1} + n C_2^{n-1} + \dots + n C_{n-1}^{n-1}$$

$$E_2 = n [C_0^{n-1} + C_1^{n-1} + C_2^{n-1} + \dots + C_{n-1}^{n-1}]$$

$$E_2 = n \cdot 2^{n-1} \quad (3)$$

Finalmente reemplazando (2) y (3) en (1) tenemos:

$$\sum_{r=0}^n (m+r) C_r^n = m \cdot 2^n + n \cdot 2^{n-1}$$

$$\therefore \sum_{r=0}^n (m+r) C_r^n = (2m+n) \cdot 2^{n-1}$$

Rpta.: C

PROBLEMA 94 La expresión dada se puede reescribir así

$$S = C_1^n \cdot C_1^n + 2C_2^n \cdot C_2^n + 3C_3^n \cdot C_3^n + \dots + nC_n^n \cdot C_n^n$$

Degradando al primer factor combinatorio en cada uno de los términos tenemos:

$$S = nC_0^{n-1} \cdot C_1^n + nC_1^{n-1} \cdot C_2^n + nC_2^{n-1} \cdot C_3^n + \dots + nC_{n-1}^{n-1} \cdot C_n^n$$

$$S = n \left[C_0^{n-1} \cdot C_1^n + C_1^{n-1} \cdot C_2^n + C_2^{n-1} \cdot C_3^n + \dots + C_{n-1}^{n-1} \cdot C_n^n \right]$$

$$S = n \left[C_0^{n-1} \cdot C_{n-1}^n + C_1^{n-1} \cdot C_{n-2}^n + C_2^{n-1} \cdot C_{n-3}^n + \dots + C_{n-1}^{n-1} \cdot C_0^n \right]$$

$$\therefore S = nC_{n-1}^{2n-1}$$

Rpta.: B

PROBLEMA 95 De acuerdo con la fórmula de Leibnitz se plantea:

$$(x + 2y - z)^8 = \sum \binom{8}{\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3} x^{\alpha_1} (2y)^{\alpha_2} (-z)^{\alpha_3}$$

$$(x + 2y - z)^8 = \underbrace{\sum \binom{8}{\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3} 2^{\alpha_2} (-1)^{\alpha_3} \cdot x^{\alpha_1} y^{\alpha_2} z^{\alpha_3}}_{\text{Coeficiente}}$$

Por condición $\alpha_1 = 2$ y $\alpha_2 = 3$ y $\alpha_3 = 3$, luego el coeficiente será:

$$\text{Coeficiente} = \binom{8}{2; 3; 3} \cdot 2^3 \cdot (-1)^3$$

$$\text{Coeficiente} = \frac{8!}{2! \cdot 3! \cdot 3!} \cdot 8 \cdot (-1)$$

$$\therefore \text{Coeficiente} = -4480$$

Rpta.: E

PROBLEMA 96 1era. forma: según Leibnitz

$$(1 + ax + bx^2)^{10} = \sum \binom{10}{\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3} a^{\alpha_2} b^{\alpha_3} x^{\alpha_2 + 2\alpha_3}$$

Por condición y teoría:

$$\begin{array}{ccc} \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 & \wedge & \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 10 \\ \downarrow & & \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ 0 & & 10 \quad 0 \quad 0 \end{array}$$

Ahora el término independiente será TI, donde:

$$TI = \binom{10}{10;0;0} a^0 \cdot b^0$$

$$TI = \frac{10!}{10!.0!.0!} = 1 \cdot 1$$

$$\therefore TI = 1$$

2da. forma: valor numérico

$$\begin{aligned} P(x) &= (1 + ax + bx^2)^{10} \\ P(0) &= \text{término independiente de } x \text{ en } P(x) \\ P(0) &= (1 + 0 + 0)^{10} = (1)^{10} = 1 \end{aligned}$$

Rpta.: A

PROBLEMA 97

De acuerdo con la fórmula de Leibnitz procedemos de la forma siguiente:

$$(x^2 + x^{-1} + 1)^6 = \sum \binom{6}{\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3} x^{2\alpha_1 - \alpha_2}$$

Por condición y teoría:

$$\begin{array}{ccc} 2\alpha_1 - \alpha_2 = 3 & \wedge & \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 6 \\ \downarrow & & \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ 2 & 1 & 2 \quad 1 \quad 3 \\ 3 & 3 & 3 \quad 3 \quad 0 \end{array}$$

Supongamos que "c" es el coeficiente buscado, luego según la teoría.

$$C = \binom{6}{2; 1; 3} + \binom{6}{3; 3; 0}$$

$$C = \frac{6!}{2! \cdot 1! \cdot 3!} + \frac{6!}{3! \cdot 3! \cdot 0!}$$

$$C = 60 + 40$$

$$\therefore C = 10$$

Rpta.: D

PROBLEMA 98 De acuerdo con el enunciado podemos realizar el siguiente esquema:

X_1	X_2	A_1	A_2	F_1	F_2
-------	-------	-------	-------	-------	-------

Cantidad de maneras de ubicar dos libros de álgebra = $2! = 2$

Cantidad de maneras de ubicar dos libros de aritmética = $2! = 2$

Cantidad de maneras de ubicar dos libros de Física = $2! = 2$

Cantidad de maneras de ubicar por bloque (juntos) los libros = $3! = 6$

Finalmente por el principio fundamental de la multiplicación tenemos:

$$N^{\circ} \text{ maneras totales} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 6$$

$$\therefore N^{\circ} \text{ maneras totales} = 48$$

Rpta.: B

PROBLEMA 99

Nuestra estrategia para resolver este problema consistirá en lo siguiente:

Primero calculamos las permutaciones de todos los elementos sin importar que "a" y "b" sean inmediatos

Luego calculamos las permutaciones de todos los elementos suponiendo que "a" y "b" son inmediatos (juntos) para

finalmente por diferencia tener el número de permutaciones pedido

PROBLEMA 99

I. Las permutaciones de "n" elementos viene dado por $n!$

II. Si los elementos "a" y "b" permanecen juntos en el grupo se les considera como un solo elemento, razón por la cual deberán permutar " $n - 1$ " elementos.

Nótese que aún estando juntos "a" y "b" ellos podrán permutar entre sí, por tanto el número de permutaciones será $2(n - 1)!$

Finalmente si "x" el número de permutaciones solicitado, se cumple:

$$x = n! - 2(n - 1)!$$

$$x = n(n - 1)! - 2(n - 1)!$$

$$\therefore x = (n - 2) \cdot (n - 1)!$$

Rpta.: C

PROBLEMA 100

Inicialmente vamos a determinar la cantidad de formas en que se pueden acomodar las 6 personas (los padres y los hijos)

P	H ₁	H ₂	H ₃	H ₄	M
---	----------------	----------------	----------------	----------------	---

cantidad de maneras de ubicarse para los padres $2! = 2$

cantidad de maneras de ubicarse para los hijos $4! = 24$

Ahora las seis personas, según la condición del problema se podrán ubicar de $2 \cdot 24 = 48$ maneras.

Finalmente el grupo de 6 personas pueden ubicarse en los 7 asientos de la fila así:

P	H ₁	H ₂	H ₃	H ₄	M	
---	----------------	----------------	----------------	----------------	---	--

O también así:

	P	H ₁	H ₂	H ₃	H ₄	M
--	---	----------------	----------------	----------------	----------------	---

es decir de 2 maneras, por tanto el número de maneras en que pueden acomodarse la pareja y sus 4 hijos será :

$$x = 2(48)$$

$$\therefore x = 96$$

Rpta.: C

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Reducir: $\frac{n!}{r!(n-r)!}$

$$M = \left[\frac{8! + 7!}{7! + 6!} \right]$$

- A) $\frac{13}{2}$ B) $\frac{27}{4}$ C) $\frac{63}{8}$
D) $\frac{35}{6}$ E) $\frac{1}{8}$

2. Resolver:

$$3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot \dots \cdot (3n-3)(3n) = 9^{n+2} n!$$

- A) 12 B) 18 C) 24
D) 8 E) 36

3. Calcular "x", si:

$$\frac{(3x+4)(3x+4)!(3x+6)!}{(3x+5)! - (3x+4)!} = 72!$$

- A) 12 B) 30 C) 22
D) 21 E) 18

4. Calcular "x" que verifique:

$$C_3^{x-8} = 220$$

- A) 17 B) 18 C) 2
D) 23 E) 20

5. Determinar "n" si:

$$\frac{(1 + \frac{n}{6}) \frac{n}{6}}{6 + \frac{n}{6}} = 20$$

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

6. Resolver:

$$\frac{(x+5)!(x+11)!}{(x+6)! + 5(x+5)!} = 20!$$

- A) 9 B) 8 C) 12
D) 10 E) 11

7. Determinar: x + y si:

$$C_x^{x+5} + C_{x+1}^{x+5} = C_{x+3}^y$$

- A) 12 B) 15 C) 13
D) 10 E) 18

8. Determinar "x" que verifica la ecuación:

$$\frac{22}{x-8} C_8^{x-1} = C_7^x$$

- A) 8 B) 10 C) 11
D) 12 E) 13

9. Si: $(x+1)! - x! = 18$

El valor de: $(x+1)! + x!$ es:

- A) 24 B) 36 C) 30
D) 54 E) 60

10. Calcular el valor de:

$$E = \sqrt{3! + \sqrt{3! + \sqrt{3! + \dots}}}$$

- A) 5 B) 3 C) 2
D) 7 E) 6

11. Determinar "a" y "b" en la igualdad:

$$\frac{a! \cdot b!}{4} = (3!)^2$$

- A) $a = 7$; $b = 3$ B) $a = 8$; $b = 9$
 C) $a = 4$; $b = 3$
 D) $a = 2$; $b = 1$ E) $a = 5$; $b = 6$

12. Calcular:

$$\left(\frac{9! + 8!}{8!} \right) \left(\frac{10! + 9!}{9!} \right)$$

- A) 80 B) 100 C) 200
 D) 300 E) 110

13. Determinar el valor de "m" en la expresión:

$$\frac{(2m)!}{2^m \cdot m! \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2m+1)} = \frac{1}{9}$$

- A) 256 B) 3125 C) 4
 D) 27 E) 7776

14. Calcular "x" en la igualdad:

$$\frac{(x+4)!(x+6)!}{(x+4)! + (x+5)!} = 20!$$

- A) 15 B) 13 C) 11
 D) 12 E) 10

15. La suma de "n" y el menor valor de "K", que satisfacen las siguientes condiciones:

$$n! = 720 \text{ y } \binom{n+2}{k} = 56 \text{ es:}$$

- A) 8 B) 6 C) 11
 D) 9 E) 7

16. Calcular "n + k"; en:

$$C_{k+1}^{n+1} + C_k^n + \left(\frac{n-k+2}{n+1} \right) C_{k-1}^{n+1} = C_{13}^{30}$$

- A) 40 B) 44 C) 47
 D) 50 E) Hay 2 correctas

$$17. \frac{(1!+2!+3!)(2!+3!+4!)(3!+4!+5!)\dots(8!+9!+10!)}{1!3!4!\dots10!}$$

- A) 1 B) 2 C) 2,5
 D) 3 E) 1/2

18. Sabiendo que:

$$\frac{C_{n+1}^{m+1}}{m+n+x} = \frac{C_n^m}{m+n} = \frac{C_{n-1}^{m-1}}{m+n-x}$$

Calcular el valor de "m+n"; sabiendo:

$$x \neq 0$$

- A) 1 B) 2 C) 4
 D) x E) 3x

19. Simplificar:

$$\left[n C_1^{n+1} C_{n+1}^{n+2} C_{n+2}^{n+3} \dots C_{2n-1}^{2n} \right] \frac{n-1}{n}$$

- A) $\frac{n}{n-1}$ B) $\frac{n-1}{n}$ C) $\frac{2n-1}{n}$
 D) $\frac{2n}{n-1}$ E) $\frac{2n+1}{n}$

20. En una reunión hay 40 damas y 20 varones se desea elegir un presidente, vicepresidente, tesorero y un secretario la condición es que el tesorero sea una dama y el secretario un varón y nadie puede ocupar más de un cargo. Entonces, el número de maneras en que puede elegirse ese grupo directivo es igual a:

- A) 2644800 B) 2844600
C) 2866400 D) 3088400
E) 3244800

21. Cuántas palabras de seis letras, que contengan dos vocales diferentes y cuatro consonantes distintas, se puede formar con cuatro vocales incluyendo la "e" y seis consonantes incluyendo la "s" de manera que empiecen con "e" y contengan a "s".

- A) 216000 B) 3600 C) 7200
D) 10800 E) 9600

22. Una habitación tiene 4 portabombillas conectadas a un mismo interruptor. Si de un conjunto de 12 bombillas (5 buenas y 7 defectuosas) se escogen 4 al azar para colocarlas en las portabombillas, entonces el número de maneras en que la habitación puede quedar iluminada es:

- A) 5 B) 70 C) 175
D) 210 E) 460

23. Determinar el término 10 en la expansión de:

$$\left(27x^5 + \frac{1}{3x}\right)^{12}$$

- A) $220x^5$ B) $220x^7$ C) $220x^6$
D) $330x^6$ E) $320x^6$

24. Proporcionar el lugar del término independiente de "x" en:

$$B(x) = \left[x^2 + \frac{1}{x^3}\right]^{55}$$

- A) Lugar 22 B) Lugar 23
C) Lugar 25 D) Lugar 28
E) Lugar 30

25. Si en el desarrollo de:

$$B(x) = \left[3x^3 + \frac{y^2}{x}\right]^n$$

existen un término cuyos exponentes de "x" e "y" son respectivamente 5 y 8. Halle el número de términos del desarrollo.

- A) 8 B) 7 C) 9
D) 6 E) 10

26. Determinar el término central en el desarrollo de:

$$(x^2 - y^2)^8$$

- A) $48x^8y$ B) $70x^8y^4$ C) $56x^4y^2$
D) $80x^8y^2$ E) $120x^4y^4$

27. Determinar el penúltimo término en el desarrollo de:

$$(3x^2 - y^3)^{12}$$

- A) $36x^2y^{11}$ B) $-24x^3y^2$ C) $24x^3y^2$
D) $-36x^2y^{33}$ E) $-12xy^2$

28. Determinar el penúltimo término en el desarrollo de:

$$(x^2 + x^{-2} + 2)^7$$

- A) x^{-6} B) $14x$ C) $12x$
D) x^6 E) $14x^{-12}$

29. Previas simplificaciones del caso, el número de términos en el desarrollo de:

$$[(2x + 3y)^3 (2x - 3y)^3]^5 \text{ es:}$$

- A) 4 B) 7 C) 11
D) 14 E) 16

30. El producto de las sumas de coeficientes de los desarrollos de

$$(x + 6y - 4)^{n+1}; (4x + 5y)^{n-2} \text{ es } 3^{n+7}.$$

Halle el número de términos del desarrollo de:

$$(9x^2 - y)^{n+3}$$

- A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 10

31. Calcular "n", si en el desarrollo de:

$$(x^2 + 0,5x^{-1})^n$$

el onceavo término es de grado 20.

- A) 5 B) 15 C) 10
D) 25 E) 20

32. Hallar el lugar que ocupa un término del desarrollo de:

$$(x^3 - 2x^{-2})^3$$

que tiene como parte literal a x^{14}

- A) 9 B) 5 C) 6
D) 7 E) 2

33. Si el único término central del desarrollo de:

$$\left(x^2 + \frac{y}{x}\right)^n$$

es de sexto grado; entonces el coeficiente de dicho término central es:

- A) 3 B) 6 C) 10
D) 20 E) 70

34. El término independiente de "x" en:

$$\left(\frac{2}{5}x^2 + \frac{1}{2x}\right)^9 \text{ es:}$$

- A) 0,018 B) 0,002 C) 0,084
D) 0,001 E) 0,025

35. Proporcionar el coeficiente del término de grado 7 en el desarrollo de:

$$(x^7 + x^{-7})^7$$

- A) 21 B) 35 C) 42
D) 70 E) 14

36. El término central del desarrollo de:

$$\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^8; \text{ con } x \neq 0 \text{ es:}$$

- A) $56x$ B) $120x^4$ C) $70x^4$
D) $70x$ E) $56x^4$

37. Calcular $(n + k)$; si se sabe que el cuarto término del desarrollo de $(x + 2)^n$ es $80x^k$

A) 5 B) 9 C) 6
D) 10 E) 7

38. En el desarrollo de $(2x - y)^{10}$; el coeficiente de x^6y^4 es:

A) 13 380 B) 13 450 C) 13 460
D) 13 440 E) 13 455

39. En el desarrollo de: $(2 + 3x^2)^n$, el coeficiente de x^{24} es 4 veces el coeficiente de x^{22} .

Calcular el término independiente del desarrollo.

A) 2^{19} B) 2^{23} C) 2^{43}
D) 2^{25} E) 2^{21}

40. Calcular "n"; si al desarrollar:

$$(x^6 - 1)^4 (x^4 + x^2 + 1)^{2n} (x^2 - 1)^{2n}$$

se obtiene 25 términos

A) 10 B) 18 C) 8
D) 20 E) 12

41. Cuántos términos irracionales presenta el desarrollo de:

$$(\sqrt[4]{x} + \sqrt[3]{x})^{48}$$

A) 44 B) 32 C) 34
D) 42 E) 26

42. Calcular "n"; si $n \in \mathbb{Z}^+$ en:

$$F_{(x,y)} = \left(\frac{y^6}{x^4} + \frac{x^6}{y^4} \right)^n$$

Para que en el desarrollo de dicha potencia dos términos consecutivos del mismo sean independientes de "x" e "y" respectivamente.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 5 E) 10

43. Los coeficientes de los términos centrales de los desarrollos de:

$(a + b)^{n+2}$ y $(a + b)^n$; $n \in \mathbb{Z}^+$ son entre si como 15 esa 4. Calcular "n".

A) 1 B) 2
C) 3
D) 4 E) Hay 2 correctas

44. Dos términos consecutivos del desarrollo de $(x + n)^n$ tienen igual coeficiente, luego estos términos son:

A) Primero y Segundo
B) Segundo y Tercero
C) Tercero y Cuarto
D) Antepenúltimo y penúltimo
E) Penúltimo y último

45. Indicar el lugar que ocupa el término que solo depende de "x"

$$\left(x^4y + \frac{1}{xy^4} \right)^{100}$$

A) 13
B) 14
C) 19
D) 21
E) Es imposible determinarlo

46. Si en el desarrollo de:

$$(ax^a + bx^b)^n$$

los términos de lugares $a + 3yb - 1$ equidistan de los extremos; además la suma de todos los coeficientes es 27. Hallar la suma de todos los exponentes de variable "x" en su desarrollo.

- A) 20 B) 18 C) 16
D) 14 E) 15

47. Determinar el coeficiente del término de lugar
- $(k + 1)$
- en el desarrollo de:

$$(1 + x)^{1/2}$$

- A) $2^{-k} C_k^{2k}$ B) $(-1)^k 2^{-k} C_k^{2k}$
C) $(-1)^{k-1} 4^{-k} C_k^{2k}$
D) $2^{-k} C_k^{4k}$ E) C_k^{4k}

48. En el desarrollo de:

$$M_{(x,y)} = \left(\frac{9(m-n)}{\sqrt{x}} \sqrt[3]{2(m+n)} + \frac{2(m+n)}{\sqrt{x}} \sqrt[3]{m-n} \right)^{36n}$$

un término cuyo coeficiente es: $2C_{18n-1}^{36n-1}$

contiene a "x" elevado al exponente $12n$; según lo anterior. Hallar m/n .

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

49. La suma de coeficientes de:

$$(ax - \sqrt[3]{y} - b\sqrt[3]{xy})^{2a} \text{ es } 4096$$

que lugar ocupa el término en el cual el exponente de "x" e "y" son iguales a 4.

- A) 2 B) 4 C) 6
D) 8 E) 3

50. Simplificar:

$$\frac{1 + (1+x) + (1+x)^2 + (1+x)^3 + \dots + (1+x)^{n-1}}{C_1^n + C_2^n x + C_3^n x^2 + C_4^n x^3 + \dots + C_n^n x^{n-1}}$$

- A) 1 B) $\frac{x}{x+1}$ C) x
D) $\frac{x-1}{x}$ E) -1

51. Realizar:

$$\left(\begin{matrix} -1998 \\ 1 \end{matrix} \right) + \left(\begin{matrix} -1997 \\ 2 \end{matrix} \right) + \left(\begin{matrix} -1996 \\ 3 \end{matrix} \right) + \dots + \left(\begin{matrix} -1 \\ 1998 \end{matrix} \right)$$

- A) 1 B) -1 C) 0
D) 1988 E) -1998

52. Dado:
- $a, b \in \mathbb{Z}^+$

$$C_0^{1999} - C_2^{1999} + C_4^{1999} - \dots - C_{1998}^{1999} = a^b$$

Determinar el menor valor de: $(a + b)$

- A) 341 B) 1001 C) 623
D) 729 E) 1331

53. Indique el equivalente:

$$C_1^n - \frac{1}{3} C_3^n + \frac{1}{3^2} C_5^n - \dots - \left(\frac{1}{3} \right)^{\frac{n}{2}-1} C_{n-1}^n$$

- A) $\left(\frac{4}{3} \right)^n \cos \frac{n\pi}{6}$ B) $\left(\frac{2}{3} \right)^n \sin \frac{n\pi}{6}$

C) $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n \text{ Sen } \frac{n\pi}{6}$

D) $\sqrt{3}\left(\frac{4}{3}\right)^n \text{ Cos } \frac{n\pi}{6}$ E) $\sqrt{3}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n \text{ Sen } \frac{n\pi}{6}$

54. Calcular: $(n+1)(n+2)S$ siendo:

$$S = \frac{C_0^n}{2} + \frac{C_1^n}{3} + \frac{C_2^n}{4} + \frac{C_3^n}{5} + \dots + \frac{C_n^n}{n+2}$$

- A) $n \cdot 2^n - 1$ B) $n \cdot 2^{n-1}$
C) $n \cdot 2^n + 1$
D) $n \cdot 2^{n-1} - 1$ E) $n \cdot 2^{n+1} + 1$

55. Calcular la suma:

$$C_0^{10}C_5^{15} + C_1^{10}C_6^{15} + C_2^{10}C_7^{15} + \dots + C_{10}^{10}C_{15}^{15}$$

- A) C_{20}^{25} B) C_{10}^{20} C) C_{10}^{15}
D) C_{15}^{20} E) C_{15}^{25}

56. El mínimo entero "m", tal que:

$(xy - 7x + 9y - 63)^m$ tenga al menos 1998 términos es:

- A) 40 B) 41 C) 42
D) 43 E) 44

57. Si: $n \in \mathbb{Z}^+$, calcular:

$$M = \binom{n}{1}x(1-x)^{n-1} + 2\binom{n}{2}x^2(1-x)^{n-2} + \dots + k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} + \dots + n\binom{n}{n}x^n$$

- A) $n+x$ B) n C) x
D) nx E) $n-x$

58. El desarrollo de $(a+b+c+d+e)^n$; posee 14 términos más que el desarrollo de $(a+b+c+d)^{n+1}$. Calcular:

$$C_{n-1}^{n+1}$$

- A) 6 B) 10 C) 15
D) 21 E) 28

59. Cuántos términos fraccionarios presenta el desarrollo de:

$$(2x^3 + 3x^{-1})^{100}$$

- A) 18 B) 24 C) 27
D) 26 E) 25

60. Cuántos términos fraccionarios presenta el desarrollo de:

$$\left(12x^3 + \frac{31}{x}\right)^{50}$$

- A) 48 B) 24 C) 29
D) 37 E) 27

61. En el desarrollo de: $(x^2 + y - x)^8$ determinar los coeficientes de los términos de la forma: $x^{10}y^m$; donde "m" es par no nulo

- A) 28; 56 B) 420 C) -420
D) 1 E) 6

62. Sabiendo que dos términos cualesquiera del desarrollo de:

$$F(x; y) = (ax^{a^2-1} + by^{b^2+1})^{ab}$$

presentan el mismo grado absoluto.

- A) 1 B) 2 C) 4
D) 6 E) 8

63. Dado los términos semejantes, uno del desarrollo $x(x^a + y^b)^a$ y otro de $y(x^b + y^a)^b$ ambos ocupan la misma posición en cada polinomio. Determinar el valor de:

$$\frac{(a^2 + b^2)^2}{1 + a^2 b^2}$$

- A) 2 B) 4 C) 6
D) 9 E) 12

64. Determinar la suma de todos los términos cuyo grado relativo a "x" sea 3 en el desarrollo de:

$$(1 + x + y)^5$$

- A) $(1 + 20y)x^3$ B) $10(1 + y^3)x^3$
C) $5(1 + y^2)x^3$
D) $5(y^2 + 2y)x^3$ E) $10(y + 1)^2 x^3$

65. Indicar el coeficiente de x^{16} en la expansión de: $(1 - 3x + 5x^2 + x^4 + x^5)^5$

- A) 1230 B) 1225 C) 1200
D) 1115 E) 1125

66. Determinar el coeficiente del término del desarrollo de $(a + 4b + c)^n (a - 2b + c)^n$ en el cual el grado de $(a + b + c)$ excede en 14 unidades al lugar que ocupa y éste es un tercio del valor de "n".

- A) 200(13) B) $-220(3^6)$
C) $210(3^2)$
D) 230 E) $110(3^3)$

67. Calcular el coeficiente del término que admite a "xyz" en:

$$\left(\frac{1}{2}\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{y} - \frac{1}{3}\sqrt[4]{z}\right)^9$$

- A) 1052 B) 105 C) 203
D) 513 E) 230

68. Determinarse el coeficiente del término en x^{10} del desarrollo de: $(1 + 3x^2 + 3x^4)^7$

- A) 807 B) 918 C) 19278
D) 15362 E) 1254

69. El término independiente del desarrollo:

$$P(x; a) = \left[\frac{a}{x} \left(\frac{a^2}{x^2} - 3 \right) - \frac{x}{a} \left(\frac{x^2}{a^2} - 3 \right) \right]^6$$

es de la forma: C_n^m . Calcular m/n

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

70. Calcular el número de términos racionales que se encuentran en los 35 primer

$$\left(\sqrt[5]{x} + x^{-1/2}\right)^{50}$$

- A) 5 B) 12 C) 15
D) 4 E) 30

71. En el desarrollo de:

$$(6 + \sqrt{x} + 9^{-\frac{2}{3}\sqrt{x}})^4$$

Se observa que existen dos términos racionales fraccionarios. Se pide determinar el cociente de ellos.

- A) $9x/28$ B) $28/9$ C) $9/8x$
D) $28x/9$ E) $9/28$

72. Si el coeficiente del término en el desarrollo de:

$$(3^a\sqrt{x+y} + 2^{a+b}\sqrt{x^2-xy+y^2})^{2b+a}$$

que contiene a: $(x^3 + y^3)$ es igual a: $7(12)^4$
Determinar el valor de:

$$a - \sqrt[3]{2a+b}$$

- A) 1 B) 3 C) 11
D) 9 E) 6

73. Calcular el término independiente en el desarrollo de:

$$(x + 1 + \frac{1}{x})^8$$

- A) 1218 B) 1118 C) 1208
D) 1107 E) 1120

74. Si un término de la expansión de:

$$(2\sqrt{3x} - 721y - \frac{3}{2}z + 8w)^n$$

tiene como parte literal a: $x^2 y^3 z^4 w$.
Determinar el número de términos de la expansión.

- A) 360 B) 260 C) 28
D) 286 E) 300

75. Determinar el coeficiente de x^{100} en:

$$\frac{4 - 3x^2}{(1 - x)^3}$$

- A) 3450 B) 5754 C) -4318
D) 5600 E) -5724

76. Determinar el coeficiente de x^n en el desarrollo de:

$$(1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \dots)^n; (|x| < 1)$$

- A) C_{n+1}^{2n+1} B) C_{2n+1}^{3n+1}
C) $(-1)^n C_{2n-1}^{3n}$
D) $(-1)^n C_{n+1}^{2n+1}$ E) $(-1)^n C_{2n-1}^{3n-1}$

77. María tiene 3 amigos y siempre va a la universidad acompañada por lo menos con uno de sus amigos. ¿Cuántas alternativas de compañía tiene María para ir a la universidad?

- A) 6 B) 7 C) 8
D) 5 E) 9

78. ¿De cuántas formas pueden sentarse 4 parejas de esposos alrededor de una fogata si dichas parejas siempre desean estar juntas?

- A) 90 B) 98 C) 96
D) 16 E) 48

79. Para transmitir señales de una isla a la costa se dispone de 5 focos blancos, 5 rojos y 5 focos verdes, colocados en las vértices de un pentágono regular. En cada vértice, no puede haber encendido más que un foco y el número mínimo de focos encendidos es 3. ¿Cuántas señales distintas se pueden hacer?

- A) 816 B) 918 C) 216
D) 420 E) 512

80. Consideremos las ciudades A, B y C existen cuatro autopistas que unen A con B y cinco que unen B con C. Partiendo de A y pasando por B. ¿De cuántas maneras podemos llegar hasta C?
- A) 9 B) 20 C) 10
D) 40 E) 8
81. Con 7 ingenieros y 8 médicos se debe formar un comité de 6 miembros. ¿De cuántas maneras diferentes puede formarse el comité que al menos incluya dos ingenieros?
- A) 5005 B) 4929 C) 6012
D) 4585 E) 8549
82. 4 parejas de amigos van al teatro y encuentran solamente 4 asientos en fila. ¿De cuántas maneras distintas se podrán sentar si se quiere que por lo menos esté sentado un hombre y una mujer y los 4 asientos se ocupen?
- A) 1200 B) 1600 C) 1632
D) 868 E) 1240
83. Un club tiene 30 miembros de los cuales 16 son hombres, ¿cuántas juntas directivas de 3 miembros: presidente, vicepresidente y vocal, pueden formarse, si el presidente debe ser una mujer y el vicepresidente un hombre?
- A) 4272 B) 4478 C) 6272
D) 4228 E) 4028
84. Si se tiene un pentágono regular en cuyos vértices se tiene 3 focos (rojo, azul y verde) y solo se enciende un foco.
¿Cuántas señales diferentes se pueden observar si se encienden al menos 2 vértices?
- A) 270 B) 5040 C) 1008
D) 42006 E) 4200
85. Un equipo de béisbol consta de 6 jardineros, 7 jugadores de cuadro, 5 lanzadores y 2 receptores (entre titulares y suplentes). ¿De cuántas formas diferentes se puede elegir un equipo de 9 jugadores, sabiendo que debe haber 3 jardineros, 4 jugadores de cuadro un lanzador y un receptor?
- A) 7 B) 70 C) 700
D) 7000 E) 70000
86. Se tiene 3 cajas diferentes, ¿De cuántas maneras diferentes se pueden distribuir dos objetos A y B en dichas cajas, pudiendo ser que ambos queden en una misma caja.
- A) 3 B) 6 C) 1
D) 9 E) 2
87. ¿De cuántas maneras se puede representar el número 9 como suma indicada de tres sumandos positivos y diferentes?
- A) 21 B) 6 C) 18
D) 12 E) 28
88. Se tiene 10 sillas de las cuales 6 son defectuosas.
¿De cuántas maneras podemos escoger 3 sillas de tal forma que entre éstas haya al menos 2 defectuosas?
- A) 70 B) 80 C) 60
D) 90 E) 50
89. Se dispone de 8 banderas, donde 2 son rojas, 2 blancas y 4 azules; ¿De cuántas maneras diferentes se puede izar las 8 banderas en un mástil?
- A) 112 B) 240 C) 56
D) 64 E) 420
90. De cuántas maneras diferentes se pueden sentar 10 personas en una mesa redonda de 6 asientos, si 4 están en espera?
- A) 24000 B) 25200 C) 600
D) 72000 E) 960

91. Un ladrón quiere abrir una caja fuerte cuya clave consta de tres dígitos. Solamente se sabe que los dígitos posibles son : 2, 4 y 6. ¿Cuál es el mayor número de combinaciones erradas que podría intentar ?

A) 48 B) 26 C) 27
D) 21 E) 35

92. Un tablero está constituido por casilleros distribuidos en 5 columnas y 4 filas, se desean colocar 4 fichas de diferentes colores en el tablero, de tal manera que haya a la suma una sola ficha por fila y por columna. ¿De cuántas maneras pueden colocarse las fichas ?

A) 5760 B) 1152 C) 2880
D) 14400 E) 65536

93. Isabel tiene 3 recipientes, uno con bolas de color rojo, otro de azules y otro de verdes. ¿De cuántas maneras se puede elegir 10 de estas bolas ?

A) 40 B) 66 C) 70
D) 42 E) 50

94. Se desea invitar a una reunión a 6 personas escogidas de 15 presentes. Si entre ellas hay 2 matrimonios, ¿de cuántas maneras se puede invitar a 6 de ellas ?

A) 715 B) 770 C) 1177
D) 2135 E) 2480

95. Dos varones y tres chicas van al cine y encuentran 5 asientos juntos, en una misma fila, donde desean acomodarse. ¿De cuántas maneras diferentes pueden sentarse, si las tres chicas no quieren estar una al costado de la otra ?

A) 10 B) 16 C) 18
D) 15 E) 12

96. 4 hombres y 3 mujeres alquilan un auto con capacidad de 7 pasajeros para ir al autocinema (3 adelante y 4 atrás). Si se sabe que 4 personas tienen brevete, de las cuales 2 son mujeres. ¿De cuántas maneras pueden

sentarse, si una pareja viaja junto al chofer ?

A) $3! \cdot 272$ B) $3! \cdot 544$
C) $3! \cdot 408$
D) $3! \cdot 816$ E) $3! \cdot 204$

97. Ocho amigos se desean sentar en una fila, donde 4 de ellos siempre deben estar juntos, sin embargo de los 4, dos de ellos siempre deben estar separados. ¿De cuántas formas distintas se puede hacer este ordenamiento?

A) 1200 B) 1440 C) 720
D) 640 E) 1000

98. A los participantes de una convención les ofrecen 6 recorridos por día para visitar lugares de interés durante los 3 días de duración del evento. ¿En cuántas formas puede una persona acomodarse para hacer alguno de ellos ?

A) 10 B) 12 C) 16
D) 18 E) 24

99. 8 personas al bailar forman una ronda de 3 personas y alrededor de ellas otra ronda de 5 personas. ¿De cuántas maneras pueden ubicarse estas personas para empezar dicho baile ?

A) 2678 B) 2680 C) 2688
D) 2690 E) 2700

100. Supongamos que nos movemos por los puntos de coordenadas enteras del plano o bien en sentido horizontal, desplazando la abscisa 5 lugares hacia la derecha, o bien en sentido vertical, desplazando la ordenada 4 lugares hacia arriba.

Partiendo del origen, ¿de cuántas maneras podemos alcanzar algún punto situado sobre la recta tangente a la parábola :

$$50y + x^2 = 1875; \text{ en } x = 25 ?$$

A) 3 B) 2 C) 528
D) 499 E) 529

**CLAVES**

1	C
2	C
3	C
4	C
5	D
6	D
7	D
8	C
9	C
10	B
11	C
12	E
13	C
14	A
15	D
16	E
17	C
18	A
19	D
20	A
21	B
22	E
23	C
24	B
25	A

26	B
27	D
28	E
29	E
30	D
31	D
32	C
33	D
34	C
35	B
36	C
37	E
38	D
39	C
40	A
41	A
42	D
43	D
44	E
45	D
46	B
47	C
48	B
49	B
50	A

51	B
52	A
53	E
54	E
55	E
56	E
57	D
58	B
59	E
60	D
61	B
62	C
63	B
64	E
65	D
66	B
67	B
68	C
69	B
70	D
71	D
72	B
73	D
74	D
75	B

76	E
77	B
78	C
79	B
80	B
81	D
82	C
83	C
84	C
85	D
86	D
87	C
88	B
89	E
90	B
91	B
92	C
93	B
94	C
95	E
96	A
97	B
98	D
99	C
100	E

EXÁMENES DE ADMISIÓN UNVI

UNI - 2006 - I

PROBLEMA 01: Sea el intervalo cerrado $[a; b]$ el complemento del conjunto solución de la desigualdad.

$$x^2 - (\sqrt[3]{2} + \sqrt{2})x + 2^{5/6} > 0$$

Sea también $|w - a^6| \leq 3$ y $|z - b^6| \leq 5$. Entonces la longitud del intervalo que recorre la variable real $w + z$ es:

A) 6

B) 8

C) 10

D) 13

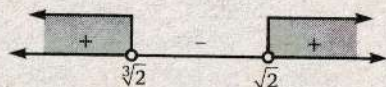
E) 16

Resolución:

Dada la desigualdad: $x^2 - (\sqrt[3]{2} + \sqrt{2})x + 2^{5/6} > 0$

$$x^2 - (\sqrt[3]{2} + \sqrt{2})x + \sqrt{2} \sqrt[3]{2} > 0$$

$$(x - \sqrt{2})(x - \sqrt[3]{2}) > 0$$



$$\text{C.S. : } \langle -\infty; \sqrt[3]{2} \rangle \cup \langle \sqrt{2}; \infty \rangle$$

Luego, el complemento del conjunto solución (C. S.) es:

$$(\text{CS})' = [\sqrt[3]{2}; \sqrt{2}] = [a; b]$$

De donde:

$$a = \sqrt[3]{2} \Rightarrow a^6 = 4 \quad \dots(1)$$

$$b = \sqrt{2} \Rightarrow b^6 = 8 \quad \dots(2)$$

Por el enunciado se cumple:

$$|w - a^6| \leq 3$$

De (1):

$$|w - 4| \leq 3$$

$$\Rightarrow -3 \leq w - 4 \leq 3$$

$$1 \leq w \leq 7$$

...(3)

Por el enunciado también se cumple:

$$|z - b^6| \leq 5$$

De (2):

$$|z - 8| \leq 5$$

$$\Rightarrow -5 \leq z - 8 \leq 5$$

$$3 \leq z \leq 13 \quad \dots(4)$$

Luego de (3) y (4) tenemos:

$$1 + 3 \leq w + z \leq 7 + 13$$

$$4 \leq w + z \leq 20$$

Entonces la longitud del intervalo que recorre la variable real $w + z$ es:

$$\therefore 20 - 4 = 16$$

Rpta.: E

PROBLEMA 02:

Una empresa contrató a un estudiante como promotor de ventas de un producto y le dieron a elegir dos modalidades de sueldo.

Modalidad **A**: Una comisión de \$3,20 por cada artículo vendido.

Modalidad **B**: un sueldo fijo de \$860 más comisión de \$1,80 por cada artículo vendido que exceda las 50 unidades.

La suma de las cifras, de la cantidad mínima de artículos que debe vender para que la primera opción sea más conveniente, es:

A) 9

B) 10

C) 11

D) 12

E) 13

Resolución:

Se debe cumplir:

Sueldo modalidad **A** > Sueldo modalidad **B**

Si x es el número de artículos vendidos, se tienen los siguientes casos:

I) $x \leq 50$;

$$3,20x > 860$$

$$x > 268,75$$

!No cumple la condición inicial ($x \leq 50$)

II) $x > 50$

$$3,20x > 860 + 1,80(x - 50)$$

$$3,20x > 860 + 1,80 - 90$$

$$\Rightarrow x > 550$$

!Si cumple con la condición inicial! ($x > 50$)

Entonces, $x_{\min} = 551$

La suma de las cifras:

$$\therefore 5 + 5 + 1 = 11$$

Rpta.: C

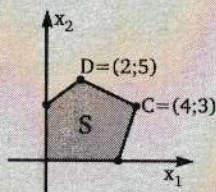
BOLETÍN DE ÁLGEBRA - 06

PROBLEMA 03: Sea $F(x_1; x_2) = ax_1 + bx_2$, la función objetivo del problema P

P: minimizar $F(x_1; x_2)$ sujeto a: $(x_1; x_2) \in S \subset \mathbb{R}^2$

Si el lado CD de la región admisible S que se indica es solución del problema P determine $a+b$ de modo que el valor óptimo de F este entre 20 y 25.

- A) 2
- B) 4
- C) 6
- D) 8
- E) 10

**Resolución:**

En la función : $F(x_1; x_2) = ax_1 + bx_2$

Si P es la función que minimiza a $F(x_1; x_2)$ y por condición del problema, el lado CD es la solución del problema P por lo tanto cualquier punto del segmento minimiza. Evaluando:

$$(2;5): F_{\min} = 2a + 5b \quad \dots(1)$$

$$(4;3): F_{\min} = 4a + 3b$$

como estas dos expresiones representan la cantidad mínima, entonces deben ser iguales:

$$2a + 5b = 4a + 3b$$

$$b = a$$

$$\dots(2)$$

Pero por condición del problema:

$$20 < F_{\min} < 25$$

$$\text{De (1):} \quad 20 < 2a + 5b < 25$$

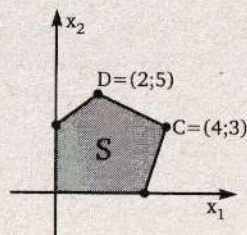
$$20 < 7b < 25$$

$$\Rightarrow b = 3 \text{ ; (entero)}$$

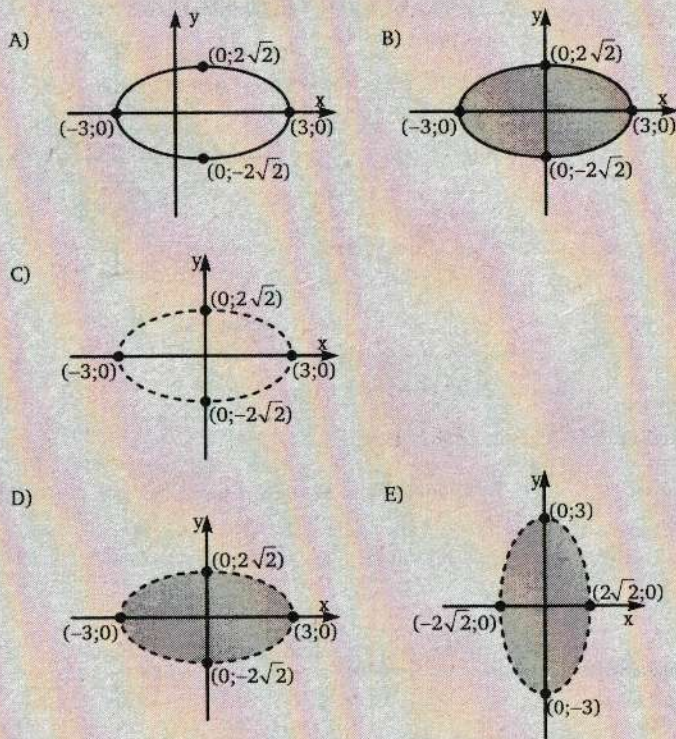
Luego, la suma de a y b:

$$a + b = 3 + 3 = 6$$

Rpta.: C



PROBLEMA 04: Determine la representación geométrica de todos los puntos del plano complejo que satisfacen la condición: $|z - 1| \leq 6 - |z + 1|$



Resolución:

De la expresión: $|z - 1| \leq 6 - |z + 1|$

Por definición se sabe que $z = x + yi$

Reemplazando en (*):

$$|x + yi - 1| \leq 6 - |x + yi + 1|$$

$$|(x - 1) + yi| \leq 6 - |(x + 1) + yi|$$

$$\sqrt{(x - 1)^2 + y^2} \leq 6 - \sqrt{(x + 1)^2 + y^2}$$

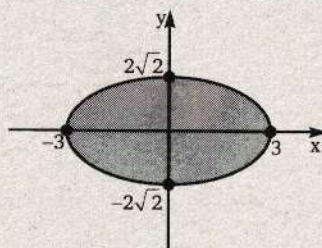
Elevando al cuadrado ambos miembros y operando:

$$3\sqrt{(x - 1)^2 + y^2} \leq 9 + x$$

$$8x^2 + 9y^2 \leq 72$$

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{(2\sqrt{2})^2} \leq 1$$

La gráfica pertenece a la siguiente elipse:



Rpta.: B

PROBLEMA 05: Al resolver la desigualdad: $\log_5 \left(\frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{35}{8} \right) < 0$

Determine la suma de todos los números x enteros que la satisfacen.

A) 2

B) 4

C) 6

D) 8

E) 10

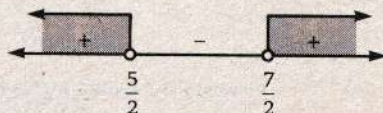
Resolución: En la desigualdad: $\log_5 \left(\frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{35}{8} \right) < 0 \quad \dots(1)$

Por propiedad se debe cumplir que:

$$\frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{35}{8} > 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x + \frac{35}{4} > 0$$

$$\left(x - \frac{7}{2} \right) \left(x - \frac{5}{2} \right) > 0$$



$$S_1 : x \in \left(-\infty; \frac{5}{2} \right) \cup \left(\frac{7}{2}; \infty + \right) \quad \dots(2)$$

Resolviendo la desigualdad (1):

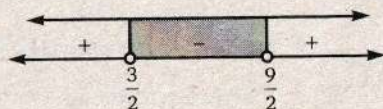
$$\log_5 \left(\frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{35}{8} \right) < 0 = \log_5 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{35}{8} < 1$$

$$\frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{27}{8} < 0$$

$$x^2 - 6x + \frac{27}{4} < 0$$

$$\left(x - \frac{9}{2} \right) \left(x - \frac{3}{2} \right) < 0$$



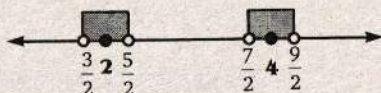
$$S_2: x \in \left(\frac{3}{2}; \frac{9}{2} \right)$$

Luego $S_1 \cap S_2$:



$$C.S.: \left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2} \right) \cup \left(\frac{7}{2}; \frac{9}{2} \right)$$

Pero por condición del problema $x \in \mathbb{Z}$, entonces:



$$x = \{2; 4\}$$

La suma de estos números:

$$\therefore 2 + 4 = 6$$

Rpta.: C

PROBLEMA 06: Señale la alternativa que presenta la secuencia correcta, después de determinar si la proposición es verdadera (V) o falsa (F).

- I. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función biyectiva y creciente, entonces $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es decreciente.
- II. sean $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funciones decrecientes tales que $f \circ g$ existe, entonces $f \circ g$ es decreciente.
- III. si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función creciente y definamos una función $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mediante $g(x) = f(|x|)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, entonces g es creciente.

A) VVV

B) VFV

C) FVV

D) FVF

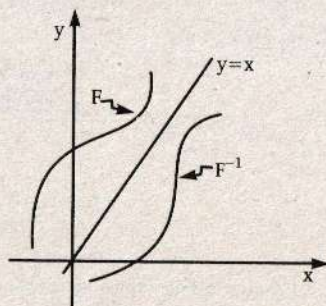
E) FFF

Resolución:

- I. Falso (F), Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función biyectiva y creciente, entonces $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es decreciente.

Verificado:

Sea F biyectiva y creciente:



F^{-1} es creciente

- II. Falso (F), Sea $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funciones decrecientes tales que $f \circ g$ existe, entonces $f \circ g$ es decreciente.

Verificado:

Asumimos: $F(x) = -x^3$ y $G(x) = -x$

Donde F y G son decrecientes.

Luego: $(F \circ G)(x) = F(G(x))$

$(F \circ G)(x) = F(-x)$

$$(F \circ G)(x) = -(-x)^3$$

$$(F \circ G)(x) = x^3$$

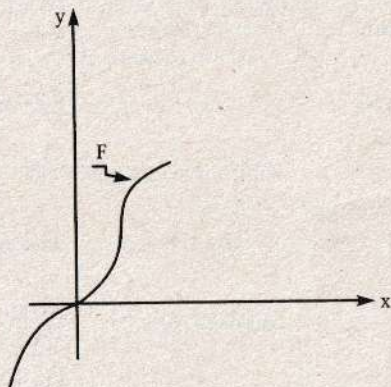
$\Rightarrow (F \circ G)(x)$ es creciente

III. Falso(**F**). Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función creciente y definamos una función

$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mediante $g(x) = f(|x|)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ entonces g es creciente.

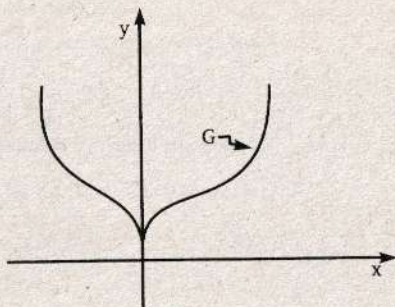
Verificado:

Sea F creciente.



Luego:

$$G(x) = F(|x|)$$



$G(x)$ no es creciente.

Rpta.: E

PROBLEMA 07: Dados los números

$$0,\overline{a\bar{b}} = \frac{b-5}{6} \text{ y } 0,\overline{b\bar{a}} = \frac{5a+6}{18}$$

Halle la tercera cifra decimal del valor que se obtiene al sumarlos.

A) 3

B) 4

C) 5

D) 6

E) 7

Resolución:

Dado los números : $0,\overline{a\bar{b}} = \frac{b-5}{6} \quad \dots(1)$

$$0,\overline{b\bar{a}} = \frac{5a+6}{18} \quad \dots(2)$$

Por teoría se sabe que : $0,\overline{a\bar{b}} = \frac{\overline{ab} - a}{90} \quad \dots(3)$

$$0,\overline{b\bar{a}} = \frac{\overline{ba} - b}{90} \quad \dots(4)$$

Igualando (3) y (1): $\frac{\overline{ab} - a}{90} = \frac{b-5}{6}$

$$\Rightarrow 14b - 9a = 75 \quad \dots(5)$$

Igualando (4) y (2): $\frac{\overline{ba} - b}{90} = \frac{5a+6}{18}$

$$\Rightarrow 3b - 8a = 30 \quad \dots(6)$$

Resolviendo las ecuaciones (5) y (6):

$$a = 1 ; b = 6 \quad \dots(7)$$

Sumando los primeros miembros de las ecuaciones(1)y(2):

$$S = 0,\overline{a\bar{b}} + 0,\overline{b\bar{a}}$$

De (7):

$$S = 0,\overline{16} + 0,\overline{61}$$

$$S = 0,1666\dots + 0,6111\dots$$

$$S = 0,\overline{7777}$$

3ra cifra
decimal

∴ La tercera cifra decimal es el número 7.

Rpta.: E

PROBLEMA 08: $(x_1, x_2, \dots, x_{20})$ es un 20-upla de números reales. sea la ecuación:

$$(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_4)^2 + \dots + (x_{19} - x_{20})^2 + (x_{20} - x_1)^2 = 1$$

El número de 20-uplas de números enteros $(x_1, x_2, \dots, x_{20})$ que son soluciones de la ecuación anterior es igual a:

- A) 0 B) 1 C) 19
D) 20 E) ∞

Resolución:

Se muestra una 20-upla de números enteros, tal que :

$$(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_4)^2 + \dots + (x_{20} - x_1)^2 = 1$$

Resolviendo:

$$2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + \dots + x_{20}^2) + x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + \dots + x_{20}x_1 = 1$$

Se deduce que lo que se encuentra dentro del paréntesis también es un número entero, entonces:

$$2N = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = 1$$

Esta igualdad es absurda. No existe soluciones por tanto el número de soluciones es cero (0).

Rpta.: A

PROBLEMA 09:

Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

entonces, la suma de los elementos de la diagonal de A^{10} es:

- A) 40230 B) 6^6 C) 60014
D) 60074 E) 10^6

Resolución:

Dada la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{DIAG}(A) = 1^1 + 2^1 + 3^1 = 6 \quad \dots(1)$$

Calculando el cuadrado de la matriz A:

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 15 & 39 \\ 0 & 2^2 & 133 \\ 0 & 0 & 3^2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{DIAG}(A^2) = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14 \quad \dots(2)$$

Calculando el cubo de la matriz A:

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 1 & 35 & 223 \\ 0 & 2^3 & 133 \\ 0 & 0 & 3^3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{DIAG}(A^3) = 1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 \quad \dots(3)$$

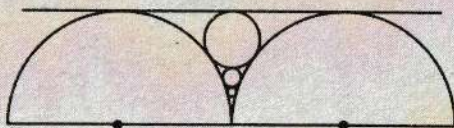
Induciendo de (1), (2) y (3) se tiene:

$$\text{DIAG}(A^{10}) = 1^{10} + 2^{10} + 3^{10} = 60074$$

Rpta.: D

PROBLEMA 10: Como se indica en la figura adjunta se construye progresivamente circunferencias tangentes de radio cada vez menor, tangentes a dos semicircunferencias de igual radio R. Use dicha construcción para determinar la suma de la serie infinita.

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n \times (n+1)} + \dots$$



A) $2R$

B) R

C) $\frac{R}{2}$

D) $\frac{1}{2}$

E) 1

Resolución:

Como la serie infinita no contiene una relación con el radio R, entonces esta es independiente de este valor, y por lo tanto, sólo se procede a operar:

$$S = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$$

$$S = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \dots$$

$$\therefore S = 1$$

Rpta.: E

UNI - 2006 - II

PROBLEMA 11: Katty, Laura y Liz hacen las siguientes afirmaciones respecto a un número irracional x.

Liz: Si le sumo otro irracional al resultado sigue siendo un número irracional.

Katty: Si a, b, c, d son números racionales tal que:

$$a + bx = c + dx \Rightarrow a = c \text{ y } b = d$$

Laura: la solución del sistema $y^{1/n} - x = 0$ es irracional, donde $n \in \mathbb{N}$.

Son correctas:

A) Liz

B) Katty

C) Liz y Laura

D) Liz y Katty

E) Katty y Laura

Resolución:

Con respecto a un número irracional.

Liz: si le suma otro irracional el resultado sigue siendo un número irracional.

Incorrecta

Verificación:

Se tiene el número irracional $\sqrt{3}$ y luego se le suma el número irracional $-\sqrt{3}$

Veamos:

$$\sqrt{3} + (-\sqrt{3}) = 0; \text{ !Es un número racional!}$$

Katty: Si a, b, c, d son números racionales tal que:

$$a + bx = c + dx \Rightarrow a = c \text{ y } d = d. \text{ correcta}$$

Verificación:

Si

$$a + bx = c + dx$$

$$\Rightarrow \underbrace{a - c}_{\text{numero racional}} = (d - b)x$$

Si $d \neq b \Rightarrow (d - b)x$ es un numero irracional.

Pero para que cumpla la igualdad de que ambos miembros sean racionales:

$$d - b = 0 \Rightarrow d = b$$

$$\Rightarrow a - c = 0 \Rightarrow a = c$$

Laura: La solución $y^{\frac{1}{n}} - x = 0$ es irracional, donde $n \in \mathbb{R}$.

incorrecta

Verificación:

Supongamos el número irracional $x = 3^{\frac{1}{2}}$, donde $n = 2$, luego en la expresión:

$$y^{\frac{1}{2}} - x = 0$$

$$y^{\frac{1}{2}} - 3^{\frac{1}{2}} = 0$$

$$y^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow y = 3 \text{ es un número racional !}$$

Conclusión : solo lo que afirma katty es correcto.

Rpta.: B

PROBLEMA 12:

Dada la función: $f(x) = K + \frac{1}{x - K}$; $\forall (x \neq K)$

Halle todos los valores que puede tomar K para que la gráfica de función f y de su inversa sea la misma.

A) $[1; 2)$

B) $[0; 1]$

C) $[-1; 1]$

D) $[0; +\infty)$

E) $(-\infty; +\infty)$

Resolución:

Dada la función: $f(x) = x + \frac{1}{x-k}; \forall (x \neq k)$

Observe que $x \neq k$ para que la fracción $\frac{1}{x-k}$ no se vuelva indeterminada, pero k si puede asumir cualquier valor de los números reales, es decir:

$$k \in \langle -\infty; \infty \rangle \quad \dots (1)$$

La inversa de la función $f(x)$:

$$f(x) = x + \frac{1}{x-k}$$

$$y = x + \frac{1}{x-k}$$

$$\Rightarrow x = \frac{yk - k^2 + 1}{y - k}$$

$$x = \frac{k(y - k) + 1}{y - k}$$

$$x = k + \frac{1}{y - k}$$

$$\Rightarrow f(x) = k + \frac{1}{x - k}$$

Como la función inversa $f(x)$ tiene la misma expresión que la función $f(x)$, esta también tendrá la misma gráfica, y los valores que puede asumir k también serán los mismos.

$$k \in \langle -\infty; \infty \rangle$$

Rpta.: E

PROBLEMA 13:

Halle el valor de $E = 4x + 3y$, donde x e y son valores enteros que satisfacen el siguiente sistema de inecuaciones.

$$\begin{cases} 5x - 3y > 2 \\ 2x + y < 11 \\ y > 3 \end{cases}$$

A) 20

B) 24

C) 25

D) 32

E) 36

Resolución:Para hallar el valor de: $E = 4x + 3y \quad \dots (*)$ Donde x e y tienen valores enteros que pertenecen a las tres regiones, definidas por:

$$S_1 = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / 5x - 3y \geq 2\}$$

$$S_2 = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / 2x + y < 11\}$$

$$S_3 = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / y > 3\}$$

Las rectas límites de las regiones S_1, S_2, S_3 son respectivamente:

$$L_1 : 5x - 3y = 2 \Rightarrow y = \frac{5}{3}x - \frac{2}{3}$$

$$L_2 : 2x + y = 11 \Rightarrow y = -2x + 11$$

$$L_3 : y = 3$$

$$\bullet L_1 \cap L_3 : 5x - 3(3) = 2 \Rightarrow x = \frac{11}{5}; y = 3$$

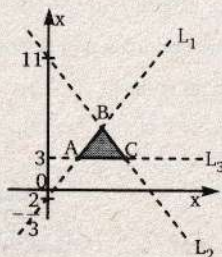
$$\bullet L_2 \cap L_3 : 2x + 3 = 11 \Rightarrow x = 4; y = 3$$

$$\bullet L_1 \cap L_2 : \frac{5}{3}x - \frac{2}{3} = -2x + 11 \Rightarrow x = \frac{35}{11}$$

$$\Rightarrow y - 2\left(\frac{35}{11}\right) + 11 \Rightarrow y = \frac{51}{11}$$

$$\Rightarrow A = \left(\frac{11}{5}; 3\right); B = \left(\frac{35}{11}; \frac{51}{11}\right); C = (4; 3)$$

Graficando:

Para que x e $y \in \mathbb{Z}$ pertenezcan a las tres superficies o regiones S_1, S_2 y S_3 , estos deben estar ubicados dentro del triángulo ABC, es decir:

$$\frac{11}{5} < x < 4 \Rightarrow x = 3$$

$$3 < y < \frac{51}{11} \Rightarrow y = 4$$

Luego, calculamos la expresión(*):

$$\therefore E = 4(3) + 3(4) = 24$$

Rpta.: B

PROBLEMA 15: El conjunto de los números reales que satisface la inecuación

$$\log_6(x+3-3\sqrt{x+1}) < 1 \text{ es:}$$

- A) $\{x/-1 \leq x < 0\}$
- B) $\{x/0 < x < 3\}$
- C) $\{x/-1 \leq x < 15\}$
- D) $\{x/3 < x < 15\} \cup \{x/x > 30\}$
- E) $\{x/-1 \leq x < 0\} \cup \{x/3 < x < 15\}$

Resolución:

Dada la inecuación:

$$\log_6(x+3-3\sqrt{x+1}) < 1 \quad \dots(*)$$

Restricciones:

$$\bullet x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1 \quad \dots(1)$$

$$\bullet x+3-3\sqrt{x+1} > 0 \quad \dots(2)$$

De la inecuación(*):

$$\begin{aligned} \log_6(x+3-3\sqrt{x+1}) < 1 &= \log_6 6 \\ \Rightarrow x+3-3\sqrt{x+1} &< 6 \end{aligned}$$

De(2):

$$0 < x+3-3\sqrt{x+1} < 6$$

$$0 < x+1-3\sqrt{x+1}+2 < 6$$

$$0 < (\sqrt{x+1})^2 - 2\left(\frac{3}{2}\right)\sqrt{x+1} + \frac{9}{4} - \frac{1}{4} < 6$$

$$0 < \left(\sqrt{x+1} - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} < 6$$

$$\frac{1}{4} < \left(\sqrt{x+1} - \frac{3}{2}\right)^2 < \frac{25}{4}$$

$$\frac{1}{2} < \left|\sqrt{x+1} - \frac{3}{2}\right| < \frac{5}{2} \quad \dots(3)$$

Resolviendo la inecuación:

$$a) \text{ Si: } \sqrt{x+1} - \frac{3}{2} \geq 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+1} \geq \frac{3}{2}$$

$$x+1 \geq \frac{9}{4}$$

$$x \geq \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow S_1: x \in \left[\frac{5}{4}; +\infty \right)$$

Operando en (3):

$$\frac{1}{2} < \sqrt{x+1} - \frac{3}{2} < \frac{5}{2}$$

$$\frac{4}{2} < \sqrt{x+1} < \frac{8}{2}$$

$$2 < \sqrt{x+1} < 4$$

$$4 < x+1 < 16$$

$$3 < x < 15$$

$$\Rightarrow S_2: x \in (3; 15)$$

$$\Rightarrow C.S_1 = S_1 \cap S_2$$

$$= \left(\frac{5}{4}; +\infty \right) \cap (3; 15)$$

$$= (3; 15)$$

$$b) \text{ Si: } \sqrt{x+1} - \frac{3}{2} < 0$$

$$\Rightarrow 0 \leq \sqrt{x+1} < \frac{3}{2}$$

$$0 \leq x+1 < \frac{9}{4}$$

$$-1 \leq x < \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow S_3: x \in \left[-1; \frac{5}{4} \right)$$

Operando en (3):

$$-\frac{1}{2} > \sqrt{x+1} - \frac{3}{2} > -\frac{5}{2}$$

$$1 > \sqrt{x+1} > -1$$

$$1 > \sqrt{x+1} \geq 0 > -1$$

$$1 > x+1 \geq 0$$

$$0 > x \geq -1$$

$$\Rightarrow S_4 : x \in [-1; 0)$$

$$C.S_2 = S_3 \cap S_4$$

$$= [-1; 0)$$

Finalmente de (4) y (5):

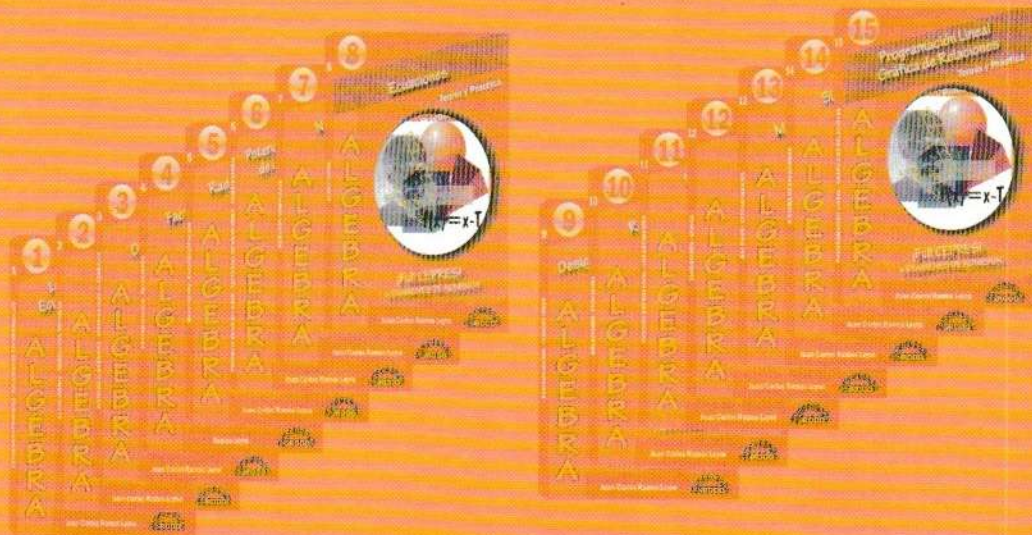
$$C.S = C.S_1 \cup C.S_2$$

$$= [-1; 0) \cup (3; 15)$$

$$= \{x / -1 \leq x < 0\} \cup \{x / 3 < x < 15\}$$

Rpta.: E

- | | |
|----|---|
| 2 | El polinomio - Productos Notables |
| 3 | División Algebraica - Divisibilidad Algebraica |
| 4 | Factorización - Fracciones |
| 5 | Radicación - Racionalización |
| 6 | Potencia de un Binomio - Factorial de un Número -Combinatoria |
| 7 | Números Complejos |
| 8 | Ecuaciones |
| 9 | Desigualdades - Inecuaciones |
| 10 | Relaciones - Funciones |
| 11 | Función Exponencial - Logarítmación |
| 12 | Sucesiones - Series |
| 13 | Matrices - Determinantes |
| 14 | Sistema de Ecuaciones |
| 15 | Programación Lineal - Gráficas de Relaciones |



N°

TEMA

1

Leyes de Exponentes - Ecuaciones Exponenciales